1・4 偏微分方程式への応用 — 熱伝導問題とその解の拡張 —

長岡技術科学大学 小林泰秀

平成 25 年 1 月 10 日

教科書 [1] では、棒の両端の温度が 0 の場合を考えている。これを一般化し、両端の温度が 0 と限らないとした次の問題を考える。

問題 1 (熱伝導問題) 以下を満たす $u(x,t)$ を求めよ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0) \tag{1}$$

$$u(0,t) = T_0, \quad u(l,t) = T_l \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_0(x) \tag{3}$$

ここで、k は正数, l は棒の長さで、$f_0(x)$ は $t = 0$ における初期温度分布を表す関数であるとする。

この問題の解は次のように与えられる。

補題 1 以下の $u(x,t)$ が *(1), (2), (3)* 式を満たす。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{l^2}} \sin\frac{n\pi x}{l}\right\} + f_\infty(x) \tag{4}$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l (f_0(x) - f_\infty(x))\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{5}$$

ここで、$f_\infty(x)$ は、最終的な温度分布すなわち、T_0 と T_l を結ぶ直線を表し、次式で与えられる。

$$f_\infty(x) := \left(1 - \frac{x}{l}\right)T_0 + \frac{x}{l}T_l \tag{6}$$

両端の温度が 0 の場合、$f_\infty(x)$ は恒等的に 0 となる。教科書にはこの結果が示されている。この場合、(4) 式の無限級数は、指数関数 $e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{l^2}}$ の働きにより、$t \to \infty$ で 0 に収束する。一方、両端の温度が 0 と限らない場合でも、$t \to \infty$ の極限は $f_\infty(x)$ によって与えられ、無限級数の項は同様に 0 に収束する。すなわち、この解の構造は、$t \to \infty$ の極限からの差分 $u(x,t) - f_\infty(x)$ が、フーリエ級数と指数関数で表現されたものになっている。

以下、証明を示す。導出の大部分は $T_0 = T_l = 0$ の場合と同様であるので、違う点に絞って示す。

証明 1 まず、

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{7}$$

とおくと失敗することを示しておく。この場合、*(2)* 式より、

$$u(0,t) = X(0)T(t) = T_0$$

すなわち、$X(0) = T_0 = 0$ でなくてはならない *(*$T(t)$ が恒等的に 0 でないことと、T_0 が定数であることから*)*。しかし、今 T_0 が *0* と限らない問題を考えているので、結局、*(7)* 式の仮定は妥当でないことがわかる。

この問題を解決するために、*(6)* 式の $f_\infty(x)$ を追加して

$$u(x,t) = X(x)T(x) + f_\infty(x) \tag{8}$$

とおく。この場合、*(2)* 式より、

$$u(0,t) = X(0)T(t) + T_0 = T_0$$

すなわち、$X(0) = 0$ となる。また、

$$u(l,t) = X(l)T(t) + T_l = T_l$$

より、$X(l) = 0$ となり、ここまで *(8)* 式の仮定に問題は生じない。

$f_\infty(x)$ は直線であり、x で二回偏微分すると 0 となる。よって、*(1)* 式は $T_0 = T_l = 0$ の場合と同様に、次式と等価となる。

$$\frac{dT}{dt} - \lambda T = 0 \tag{9}$$

$$k\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0 \tag{10}$$

以下同様に、$\lambda \geq 0$ の場合は意味のまる解が求まらない *(*$X(x)$ が恒等的に *0* となる*)* ため除外され、$\lambda < 0$ のとき、

$$X(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{11}$$

とでき *(*A は任意定数、n は任意の正整数*)*、λ は

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2 k}{l^2} \tag{12}$$

となり、$T(t)$ は

$$T(t) = Be^{-\lambda t} \tag{13}$$

となる *(*B は任意定数*)*。

これらを *(8)* 式に代入し、改めて任意定数を $C_n := AB$ とおけば、

$$u(x,t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{l^2}} \sin\frac{n\pi x}{l} + f_\infty(x) \tag{14}$$

となる。さらに、n が任意の正整数であることと、*(1)* 式が u について線形であることから、無限級数を用いて *(4)* 式のようにおいた u も *(1)* 式を満たす。

最後に初期条件を考える。*(4)* 式で $t=0$ とおくと、

$$u(x,0)=f_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}+f_\infty(x) \tag{15}$$

より、

$$f_0(x)-f_\infty(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right\} \tag{16}$$

が成り立つ。すなわち、C_n は、奇関数 $f_0(x)-f_\infty(x)$ のフーリエ係数である。ここで、$f_0(x)-f_\infty(x)$ は、$-l<x<l$ の範囲で奇関数となっていればよく、元々の定義域である $0<x<l$ では、任意の関数で構わないことに注意する *(*$-l<x<l$ で奇関数となるように、$-l<x<0$ に関数をコピーすれば良い*)*。以上より、*(5)* 式が成り立つ。*(*証明終わり*)*

参考文献

[1] 高遠 節夫, 斎藤 斉 ほか: 新訂 応用数学; 大日本図書 (2005)