問題 1.

問 1. $\phi(s)$ の根を調べよ.

(1) $s^2 - s + 1 = 0$

$$\underline{s = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j \quad \text{不安定}}$$

(2) $s^2 + 1 = 0$

$$\underline{s = \pm j \quad \text{不安定}}$$

(3) $25(s-1) + (s+10)(s-1)s = \{25 + (s+10)s\}(s-1) = (s+5)^2(s-1) = 0$

$$\underline{s = -5, 1 \quad \text{不安定}}$$

問 2. 極零相殺と, $\phi(s)$ の根に着目せよ.

(1) 不安定な極零相殺が存在.

$$\underline{\text{不安定}}$$

(2) 不安定な極零相殺が存在.

$$\underline{\text{不安定}}$$

(3) $(s-1)(s+2) + (s+1) = 0$

$$\underline{s = -1 \pm \sqrt{2} \quad \text{不安定}}$$

(4) $(s-1)(5s-1) + 1 = 0$

$$\underline{s = \frac{3}{5} \pm \frac{1}{5} j \quad \text{不安定}}$$

問題 2.

問 1. 周波数伝達関数 $P(j\omega)$ は以下で与えられる.

$$P(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega - 1} \tag{1}$$

これより $|P(j\omega)|$ と $\angle P(j\omega)$ を求めると, 次のようになる.

$$|P(j\omega)| = \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega - 1|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2}} = 1 \tag{2}$$

$$\angle P(j\omega) = \angle(j\omega + 1) - \angle(j\omega - 1) \tag{3}$$

$$= \tan^{-1}\omega - (\pi - \tan^{-1}\omega) \tag{4}$$

$$= -\pi + 2\tan^{-1}\omega \tag{5}$$

次いで, $\omega = 0, 1, \infty$ についてゲインと位相を求めると, 次のようになる.

$$\omega = 0; \quad |P(j0)| = 1, \quad \angle P(j0) = -180 \text{ [deg]} \tag{6}$$

$$\omega = 1; \quad |P(j1)| = 1, \quad \angle P(j1) = -90 \text{ [deg]} \tag{7}$$

$$\omega \to \infty; \quad |P(j\infty)| = 1, \quad \angle P(j\infty) \to 0 \text{ [deg]} \tag{8}$$

したがって, $P(s)$ のベクトル軌跡は下図のようになる.

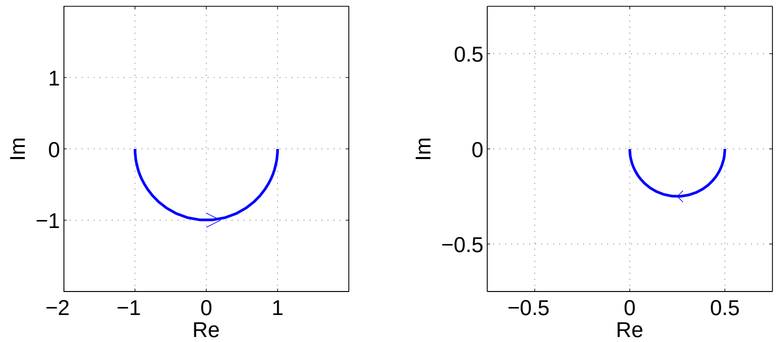
問 2. 問 1. と同様に, $|C(j\omega)|$ と $\angle C(j\omega)$ は次のように求められる.

$$|C(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \tag{9}$$

$$\angle C(j\omega) = -\angle(2 + j\omega) \tag{10}$$

$$= -\tan^{-1}\frac{\omega}{2} \tag{11}$$

したがって, $C(s)$ のベクトルは下図のようになる.



$P(s)$ **のベクトル軌跡** $C(s)$ **のベクトル軌跡**

問 3. 一巡伝達関数の周波数伝達関数 $L(j\omega)$ は, 以下で与えられる.

$$L(j\omega) = kP(j\omega)C(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega)}{(-1 + j\omega)(2 + j\omega)} \tag{12}$$

これより, $|L(j\omega)|$ および $\angle L(j\omega)$ は以下で与えられる.

$$|L(j\omega)| = |k||P(j\omega)||C(j\omega)| = k \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{4+\omega^2}} \tag{13}$$

$$\angle L(j\omega) = \angle k + \angle P(j\omega) + \angle C(j\omega) \tag{14}$$

$$= -\pi + 2\tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} \tag{15}$$

問 4. ゲイン交差角周波数は, $|L(j\omega)| = 1$ となる角周波数である.

$$|L(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{4+\omega^2}} = 1 \tag{16}$$

$$w_{gc} = \sqrt{k^2 - 4} \tag{17}$$

問 5. $k = 3$ より, $\omega_{gc} = \sqrt{5}$ を得る.

$$\angle L(j\sqrt{5}) = -\pi + 2\tan^{-1}\sqrt{5} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} = -96.4 \text{ [deg]} \tag{18}$$

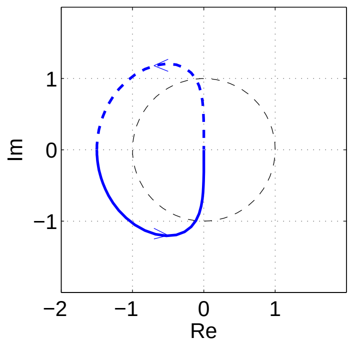
問 6. $\omega = 0, 1, \infty$ でのゲインと位相は, それぞれ次のようになる.

$$\omega = 0; \quad |L(j0)| = \frac{3}{2}, \quad \angle L(j0) = -180 \text{ [deg]} \tag{19}$$

$$\omega = 1; \quad |L(j1)| = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \angle L(j1) = -116.5 \text{ [deg]} \tag{20}$$

$$\omega \to \infty; \quad |L(j\infty)| \to 0, \quad \angle L(j\infty) \to -90 \text{ [deg]} \tag{21}$$

したがって, ナイキスト軌跡は下図のようになる.



ナイキスト軌跡は点 $(-1, 0)$ を反時計方向に 1 回転するから, $N = -1$. また, 一巡伝達関数の実部が正である極の数は $\Pi = 1$. したがって, 閉ループ系の不安定極の数は

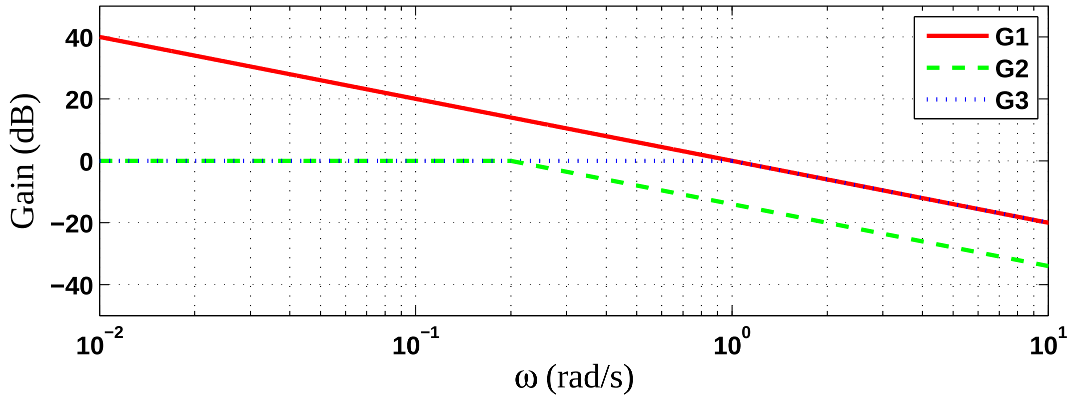
$$Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0 \tag{22}$$

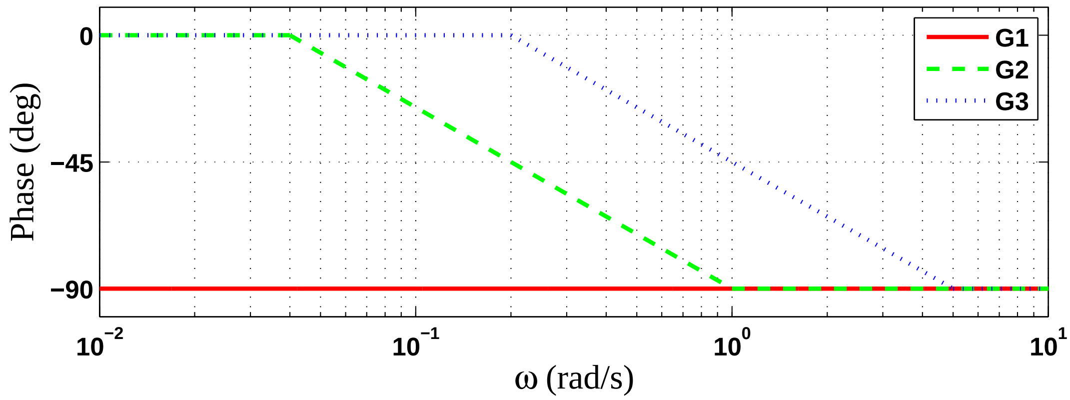
となり, $k = 3$ において閉ループ系は安定となる.

問 7. 一巡伝達関数は, $\omega = 0$ [rad/s] のとき負の実軸と交わる. これより, $\omega = 0$ [rad/s] のとき $L(j0) = -\dfrac{k}{2}$ であるから, $|L(j0)| = \left|-\dfrac{k}{2}\right| > 1$ であれば安定性が保たれる. したがって, $k > 2$ であれば系は安定となる.

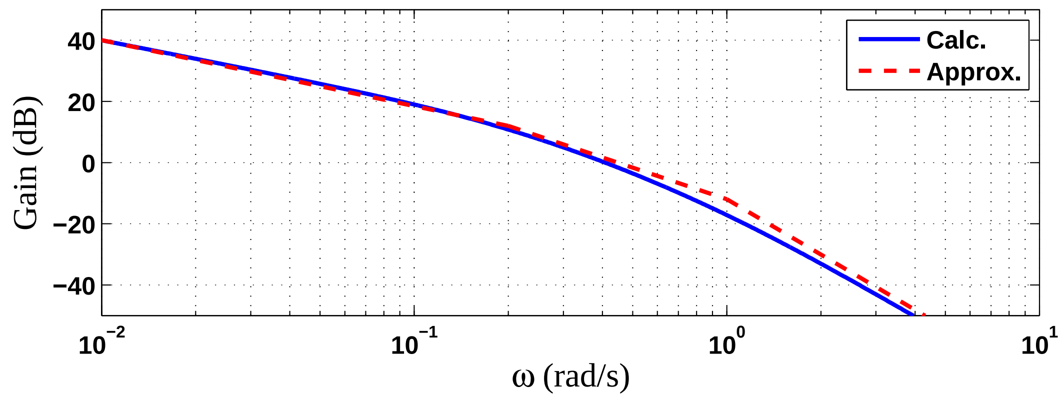
問題 3.

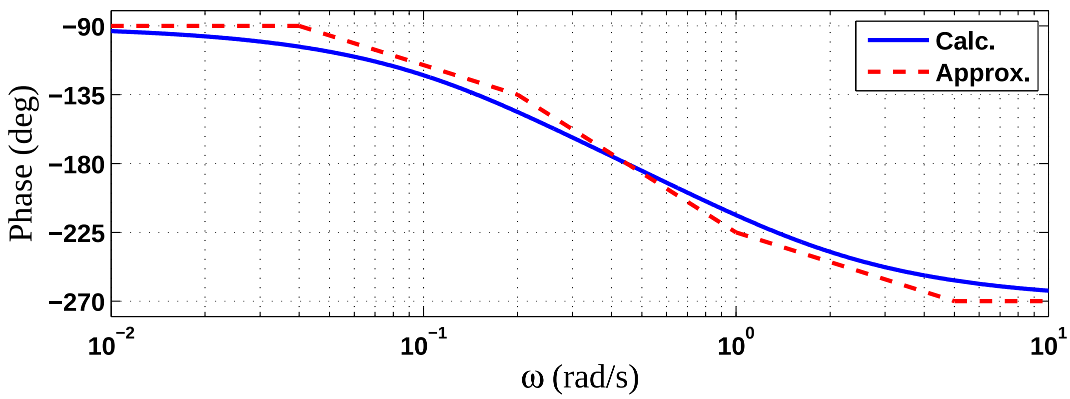
問 1. $G_1(s) = \dfrac{1}{s}$, $G_2(s) = \dfrac{1}{5s+1}$, $G_3(s) = \dfrac{1}{s+1}$ とおくと，それぞれの Bode 線図は下図のようになる．





問 2. 問 1. の結果を重ね合わせることで，$L(s)$ の Bode 線図は下図のようになる．





問 3. $L(s)$ の Bode 線図より, 位相交差角周波数 $\omega_{pc} = 0.45$ [rad/s] である. このとき

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\ \frac{1}{j\omega+1}\ \frac{1}{5j\omega+1} \tag{23}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{\omega}\ \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\ \frac{1}{\sqrt{25\omega^2+1}} \tag{24}$$

$$|L(0.45j)| = \frac{1}{0.45}\ \frac{1}{\sqrt{0.45^2+1}}\ \frac{1}{\sqrt{25\times 0.45^2+1}} \approx 0.82 \tag{25}$$

$$20\log|L(0.45j)| \approx 20\log|0.82| = -1.7 \text{ [dB]} \tag{26}$$

であるから, ゲイン余裕 GM = 10 [dB] となる K は, 次のように求められる.

$$K = -10 - (-1.7) = -8.3 \text{ [dB]} = 10^{-8.3/20} = 0.38 \tag{27}$$

問題 4. ナイキスト軌跡が点 $(-1, j0)$ のまわりを回る回転数を N, 一巡伝達関数の極の中で実部が正であるものの個数を P とする.

(a) $N = 2, P = 0$ より, 閉ループ系の不安定極の数は $Z = N + P = 2$. したがって, フィードバック制御系は不安定.

(b) $N = 0, P = 0$ より, 閉ループ系の不安定極の数は $Z = N + P = 0$. したがって, フィードバック制御系は安定.

(c) $N = 0, P = 0$ より, 閉ループ系の不安定極の数は $Z = N + P = 0$. したがって, フィードバック制御系は安定.