

問題 1.

問 1. 特性多項式 $\phi(s)$ の根を調べよ.

(1) $\phi(s) = s^2 - s + 1 = 0$

$$s = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j \quad \text{不安定}$$

(2) $\phi(s) = s^2 + 1 = 0$

$$s = \pm j \quad \text{不安定}$$

(3) $\phi(s) = 25(s-1) + (s+10)(s-1)s$
 $= \{25 + (s+10)s\}(s-1)$
 $= (s+5)^2(s-1) = 0$

$$s = -5, 1 \quad \text{不安定}$$

演習 2 解答

問題 1.

問 2. 極零相殺と, $\phi(s) = D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s)$ の解に着目せよ.

(1) $P(s) = \frac{1}{s-1} \quad C(s) = \frac{s-1}{s+1}$
不安定な極零相殺が存在 不安定

(2) $P(s) = \frac{1}{s^2-4} \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$
不安定な極零相殺が存在 不安定

(3) $P(s) = \frac{s+1}{s-1} \quad C(s) = \frac{1}{s+2}$
 $\phi(s) = (s-1)(s+2) + (s+1) = 0$
 $s = -1 \pm \sqrt{2} \quad \text{不安定}$

(4) $P(s) = \frac{1}{s-1} \quad C(s) = \frac{1}{5s-1}$
 $\phi(s) = (s-1)(5s-1) + 1 = 0$

$$s = \frac{3}{5} \pm \frac{1}{5}j \quad \text{不安定}$$

問題 2.

問 1. 周波数伝達関数 $P(j\omega)$ は以下で与えられる.

$$P(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega - 1} \quad (1)$$

これより $|P(j\omega)|$ と $\angle P(j\omega)$ を求めると, 次のようになる.

$$|P(j\omega)| = \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega - 1|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1 \quad (2)$$

$$\angle P(j\omega) = \angle(j\omega + 1) - \angle(j\omega - 1) \quad (3)$$

$$= \tan^{-1}\omega - (\pi - \tan^{-1}\omega) \quad (4)$$

$$= -\pi + 2\tan^{-1}\omega \quad (5)$$

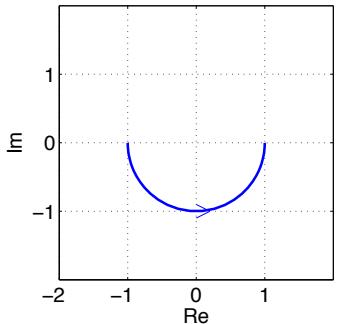
問題 2.

次いで, $\omega = 0, 1, \infty$ についてゲインと位相を求める, 次のようになる.

$$\omega = 0; \quad |P(j0)| = 1, \quad \angle P(j0) = -180 \text{ [deg]} \quad (6)$$

$$\omega = 1; \quad |P(j1)| = 1, \quad \angle P(j1) = -90 \text{ [deg]} \quad (7)$$

$$\omega \rightarrow \infty; \quad |P(j\infty)| = 1, \quad \angle P(j\infty) \rightarrow 0 \text{ [deg]} \quad (8)$$



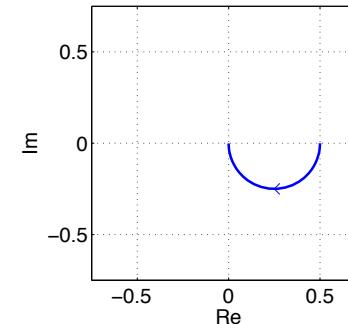
問題 2.

問 2. 問 1. と同様に, $|C(j\omega)|$ と $\angle C(j\omega)$ は次のように求められる.

$$|C(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}} \quad (9)$$

$$\angle C(j\omega) = -\angle(2 + j\omega) \quad (10)$$

$$= -\tan^{-1} \frac{\omega}{2} \quad (11)$$



問題 2.

問 3. 一巡伝達関数の周波数伝達関数 $L(j\omega)$ は、以下で与えられる。

$$L(j\omega) = kP(j\omega)C(j\omega) = \frac{k(1+j\omega)}{(-1+j\omega)(2+j\omega)} \quad (12)$$

これより、 $|L(j\omega)|$ および $\angle L(j\omega)$ は以下で与えられる。

$$|L(j\omega)| = |k||P(j\omega)||C(j\omega)| = k \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{4 + \omega^2}} \quad (13)$$

$$\angle L(j\omega) = \angle k + \angle P(j\omega) + \angle C(j\omega) \quad (14)$$

$$= -\pi + 2 \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \quad (15)$$

問題 2.

問 4. ゲイン交差角周波数は、 $|L(j\omega)| = 1$ となる角周波数である。

$$|L(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1 \quad (16)$$

$$w_{ac} \equiv \sqrt{k^2 - 4} \quad (17)$$

問 5. $k = 3$ より, $\omega_{ac} = \sqrt{5}$ を得る.

$$\angle L(j\sqrt{5}) = -\pi + 2 \tan^{-1} \sqrt{5} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}}{2} = -96.4 \text{ [deg]} \quad (18)$$

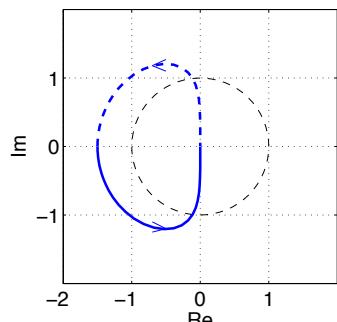
問題 2.

問 6. $\omega = 0, 1, \infty$ でのゲインと位相は、それぞれ次のようになる.

$$\omega = 0; |L(j0)| = \frac{3}{2}, \angle L(j0) = -180 [\text{deg}] \quad (19)$$

$$\omega = 1; |L(j1)| = \frac{3}{\sqrt{5}}, \angle L(j1) = -116.5 [\text{deg}] \quad (20)$$

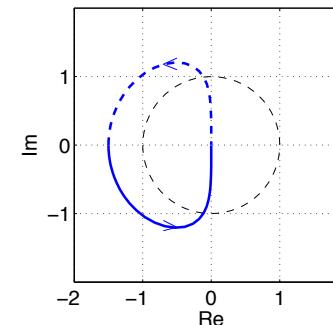
$$\omega \rightarrow \infty; |L(j\infty)| \rightarrow 0, \angle L(j\infty) \rightarrow -90 [\text{deg}] \quad (21)$$



問題 2.

- 点 $(-1, 0)$ を反時計方向に 1 回転: $N = -1$.
- $L(s)$ の実部が正である極 (不安定極) の数: $\Pi = 1$.
- 閉ループ系の不安定極の数: $Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$.

$Z = 0$ であるから, $k = 3$ において閉ループ系は安定.



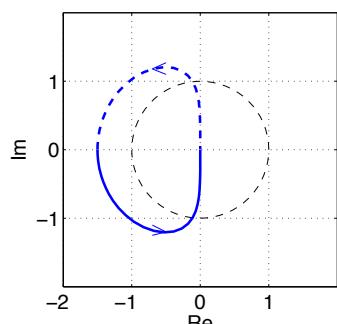
問題 2.

問 7. $L(s)$ のナイキスト軌跡は、 $\omega = 0$ [rad/s] のとき負の実軸と交わる.

- $\omega = 0$ [rad/s] のとき $L(j0) = -\frac{k}{2}$.

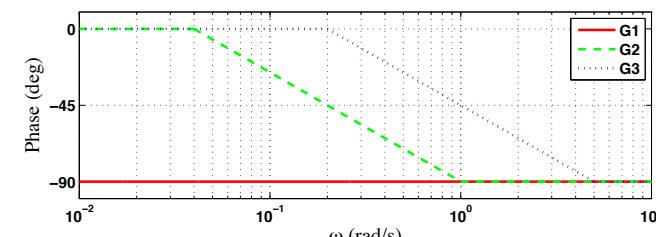
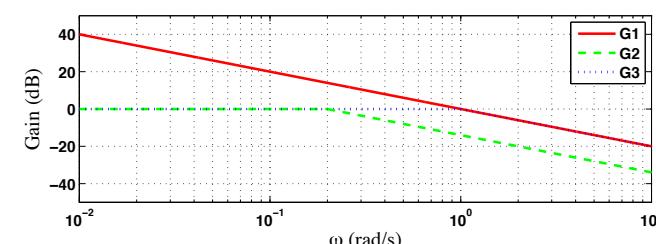
- 安定性を保つためには $|L(j0)| > 1$ が必要.

$$|L(j0)| = \left| -\frac{k}{2} \right| > 1 \Rightarrow k > 2 \text{ であれば, 制御系は安定となる.}$$



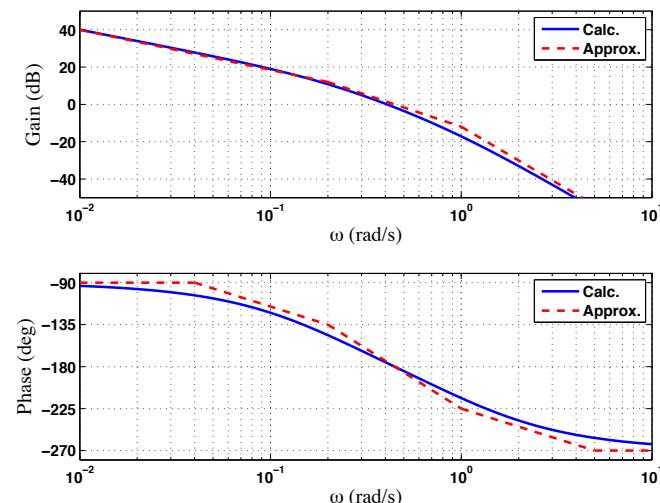
問題 3.

問 1. $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{5s+1}$, $G_3(s) = \frac{1}{s+1}$ とおく.



問題 3.

問 2. 問 1. の結果の重ね合わせから, $L(s)$ の Bode 線図が得られる.



問題 3.

問 3. 問 2. の結果から, 位相交差角周波数 $\omega_{pc} = 0.45 \text{ [rad/s]}$ を読み取る.

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \frac{1}{j\omega + 1} \frac{1}{5j\omega + 1} \quad (22)$$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{25\omega^2 + 1}} \quad (23)$$

$$|L(0.45j)| = \frac{1}{0.45} \frac{1}{\sqrt{0.45^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{25 \times 0.45^2 + 1}} \approx 0.82 \quad (24)$$

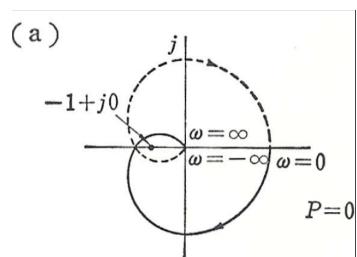
$$20 \log |L(0.45j)| \approx 20 \log |0.82| = -1.7 \text{ [dB]} \quad (25)$$

ゲイン余裕 GM = 10 [dB] となる K :

$$K = -10 - (-1.7) = -8.3 \text{ [dB]} = 10^{-8.3/20} = 0.38 \quad (26)$$

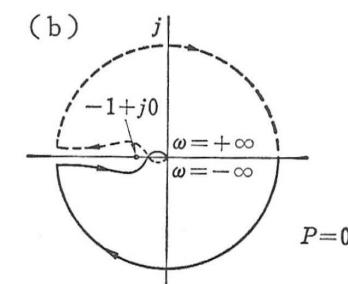
問題 4.

(a) $N = 2, P = 0$ より, 閉ループ系の不安定極の数は $Z = N + P = 2$. したがって, フィードバック制御系は不安定.



問題 4.

(b) $N = 0, P = 0$ より, 閉ループ系の不安定極の数は $Z = N + P = 0$. したがって, フィードバック制御系は安定.



問題 4.

(c) $N = 0, P = 0$ より、閉ループ系の不安定極の数は $Z = N + P = 0$. したがって、フィードバック制御系は安定.

