あるクラスの離散時間むだ時間系における補償器実装時の計算量の低減

長岡技術科学大学　◯小林 泰秀
大阪大学　浅井 徹

第 1 回制御部門大会 (2001.5.23～5.25)

動機

[むだ時間系に対する補償器設計問題]

- 連続時間設計

  $\mathcal{H}_\infty$ 制御 [Kojima et.al.1994][He et.al.1998]

  – むだ時間分の有限区間積分を実行する必要あり

  $$\int_0^L M(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

  アナログ素子を用いた実装は困難

  離散化して計算機上に実装

- 離散時間設計

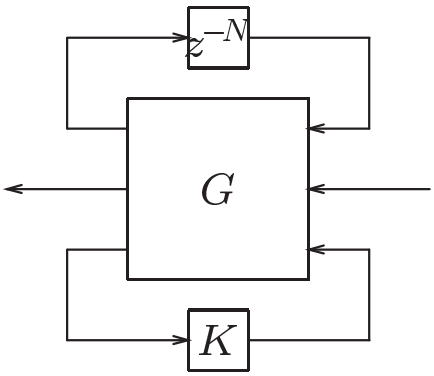
  – むだ時間要素 ... z^{-N}

  – LMI に基づく設計 [Scherer et.al 1997]

  様々な設計仕様を同時に考慮可能

動機 (つづき)

[離散時間むだ時間系設計問題]



$$K \text{ の次数} = G \text{ の次数} + N$$

- むだ時間 $\gg$ サンプリング時間

  $\rightarrow$ 計算量増大，実装困難

[感度最適化問題]

- 感度関数に対する重み関数の次数を高めて設計

  $\rightarrow$ 計算量増大，実装困難

実装時の計算時間を短縮することは可能か？

目的

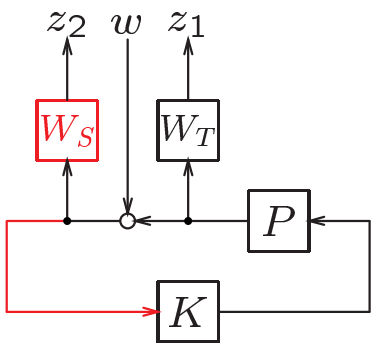
- 離散時間むだ時間系などの設計問題に対して，
  実装時の計算量の低い補償器を設計する

仮定

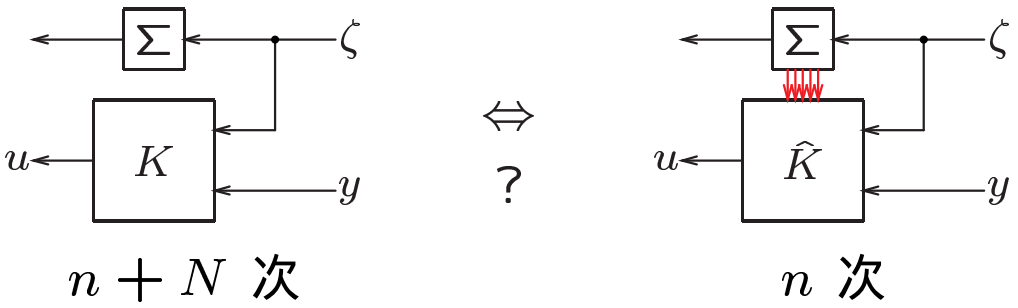
- むだ時間要素
重み関数 } の入力信号を観測可能

  … 「あるクラスの離散時間(むだ時間)系」

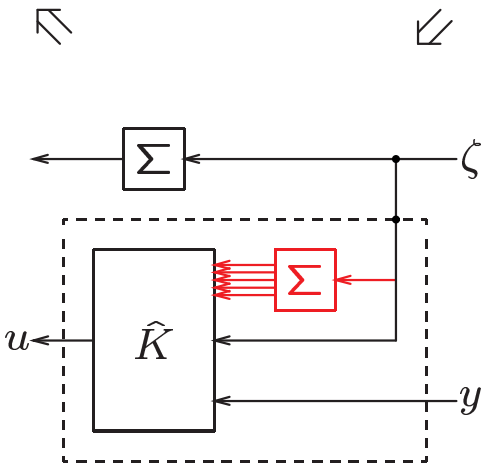
  - 入力むだ時間系
  - 状態むだ時間系で，状態フィードバック
  - 混合感度問題



基本的なアイデア



$n + N$ 次　　n 次



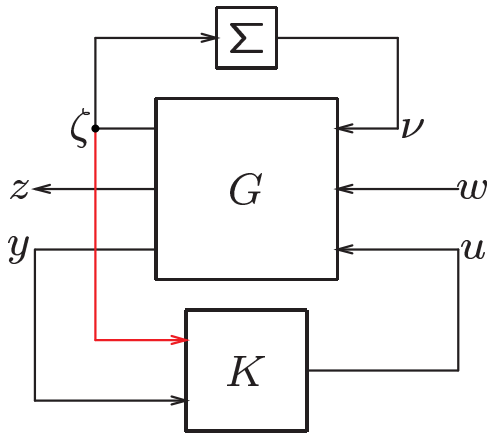
$n + N$ 次，Σ を持つ補償器

[Asai and Hara 1999] 観測可能な状態の個数分低次の補償器を設計可能

- 次数は同じだが，構造を持つ補償器が得られる．
- 実際に計算量を短縮できるか?

問題設定

- 閉ループ系



$$=: \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array}\right]$$

- 設計仕様： つぎの LMI を満たす $\mathcal{Y} > 0$ が存在する

$$\Phi(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}\mathcal{A}, \mathcal{Y}\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) < 0 \quad \cdots \quad (*)$$

Φ ： LMI のテンプレート [Asai and Hara 1999]

(a) $\Phi(\Theta_{\mathcal{Y}}, \Theta_{\mathcal{A}}, \Theta_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{C}}, \Theta_{\mathcal{D}})$ は $\Theta_{\mathcal{Y}}, \Theta_{\mathcal{A}}, \Theta_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{C}}, \Theta_{\mathcal{D}}$ に関して affine

(b) 行フルランクな行列 $\mathcal{T}$ に対して，

$$\Phi(\Theta_{\mathcal{Y}}, \Theta_{\mathcal{A}}, \Theta_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{C}}, \Theta_{\mathcal{D}}) < 0$$
$$\Downarrow$$
$$\Phi(\mathcal{T}\Theta_{\mathcal{Y}}\mathcal{T}^T, \mathcal{T}\Theta_{\mathcal{A}}\mathcal{T}^T, \mathcal{T}\Theta_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{C}}\mathcal{T}^T, \Theta_{\mathcal{D}}) < 0.$$

(c) $(*)$ を満足する $\mathcal{Y} > 0$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ と，

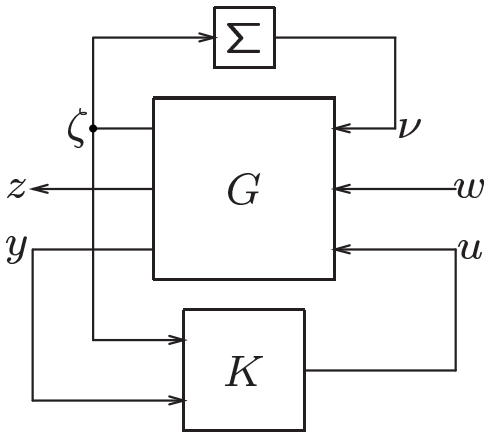
$$\Phi(Y_0, Y_0A_0, 0, 0, 0) < 0$$

を満足する $Y_0 > 0$, A_0, および適当なサイズの $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{C}_0$ に対して十分大きな $\alpha > 0$ が存在し，

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \mathcal{Y} & 0 \\ 0 & \alpha Y_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}\mathcal{A} & \mathcal{Y}\mathcal{A}_0 \\ 0 & \alpha Y_0 A_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}\mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{C}_0^T \end{bmatrix}^T, \mathcal{D}\right) < 0.$$

問題設定 (つづき)

[問題 1]



n 次の一般化プラント G と N 次の伝達関数行列 Σ

$$\Sigma(z) := \left[\begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & 0 \end{array}\right]$$

が与えられているとする．ただし，つぎの LMI を満足する $Y_0 > 0$ が存在すると仮定する．

$$\Phi(Y_0, Y_0 A_0, 0, 0, 0) < 0$$

このとき，つぎの LMI を満足する $\mathcal{Y} > 0$ が存在するような補償器 K を求めよ．

$$\Phi(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}\mathcal{A}, \mathcal{Y}\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) < 0$$

- 従来の方法
  フルオーダの補償器 $\cdots$ $n + N$ 次
- 提案する方法
  - 次数は同じだが，Σ を内部に持つ補償器
  - 補償器の構造を利用して，計算時間を短縮

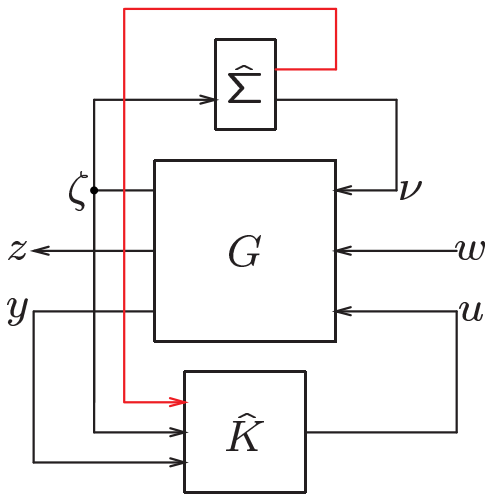
等価な問題

[定理1] つぎの 2 つは等価

(i) 問題1の解 K が存在する

(ii) 図の閉ループ伝達関数の実現 $\left[\begin{array}{c|c}\widehat{\mathcal{A}} & \widehat{\mathcal{B}} \\ \hline \widehat{\mathcal{C}} & \widehat{\mathcal{D}}\end{array}\right]$ に対してつぎの LMI を満足する $\widehat{K}$ と $\widehat{\mathcal{Y}} > 0$ が存在する

$$\Phi(\widehat{\mathcal{Y}}, \widehat{\mathcal{Y}}\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{Y}}\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{D}}) < 0$$



$$\widehat{\Sigma} := \left[\begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline I_N & 0 \\ C_0 & 0 \end{array}\right]$$

(ii) の解 $\widehat{K}$ と Σ を用いて (i) の K を構成できる:

$$K(z) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_K & B_{K1} & B_{K2} & B_{K3} \\ 0 & A_0 & B_0 & 0 \\ \hline C_K & D_{K1} & D_{K2} & D_{K3} \end{array}\right]$$

$$\widehat{K}(z) = \left[\begin{array}{c|ccc} A_K & B_{K1} & B_{K2} & B_{K3} \\ \hline C_K & D_{K1} & D_{K2} & D_{K3} \end{array}\right]$$

等価な問題 (つづき)

[証明] (i) $\Rightarrow$ (ii) :

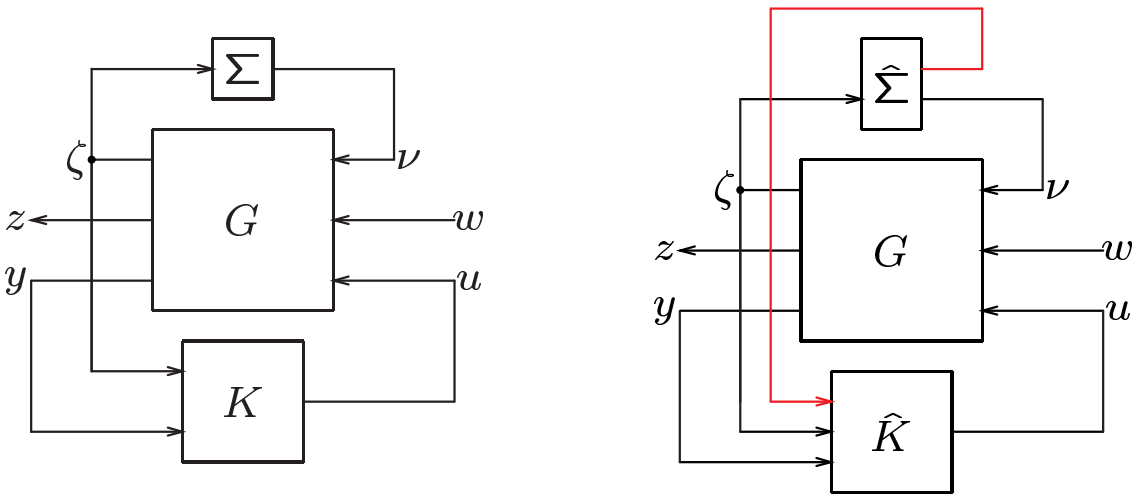
(i) の解 K が存在したと仮定する．すなわち，

$$\exists\ K,\ \mathcal{Y} > 0 \text{ s.t. } \Phi(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}\mathcal{A}, \mathcal{Y}\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) < 0$$

K を用いて $\hat{K}$ をつぎのように構成すると，(ii) の閉ループ伝達関数の実現は (i) に一致する．

$$\hat{K}(z) = \left[\begin{array}{c|cc} A_K & 0 & B_{K2} \quad B_{K3} \\ \hline C_K & 0 & D_{K2} \quad D_{K3} \end{array}\right]$$

$$K(z) = \left[\begin{array}{c|cc} A_K & B_{K2} & B_{K3} \\ \hline C_K & D_{K2} & D_{K3} \end{array}\right]$$



[証明] (ii) $\Rightarrow$ (i):

(ii) の解 $\hat{K}$ が存在したと仮定する．すなわち，

$$\exists\ \hat{K},\ \hat{\mathcal{Y}} > 0 \text{ s.t. } \Phi(\hat{\mathcal{Y}}, \hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{D}}) < 0$$

$$\Downarrow \text{公理 (c)}$$

$$\Phi(\bar{\mathcal{Y}}, \bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{C}}, \bar{\mathcal{D}}) < 0, \ \bar{\mathcal{Y}} := \mathrm{diag}(\hat{\mathcal{Y}}, \alpha Y_0)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathcal{A}} & \bar{\mathcal{B}} \\ \hline \bar{\mathcal{C}} & \bar{\mathcal{D}} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{cc|c} \hat{\mathcal{A}} & \left[\begin{array}{c} B_2 \\ B_0 D_{12} \end{array}\right] D_{K1} & \hat{\mathcal{B}} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} B_{K1} \end{array}\right] & \\ 0 & A_0 & 0 \\ \hline \hat{\mathcal{C}} & \left[\begin{array}{c} D_{12} \\ D_{32} \end{array}\right] D_{K1} & \hat{\mathcal{D}} \end{array}\right]$$

$$\hat{K}(z) = \left[\begin{array}{c|cc} A_K & B_{K1} & B_{K2} \ B_{K3} \\ \hline C_K & D_{K1} & D_{K2} \ D_{K3} \end{array}\right]$$

$$G(z) = \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ C_3 & D_{31} & D_{32} & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow \text{公理 (b)}$$

$$\Phi(\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{Y}}\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{Y}}\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{D}}) < 0, \ \tilde{\mathcal{Y}} := \mathcal{T}\bar{\mathcal{Y}}\mathcal{T}^T$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{B}} \\ \hline \tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{D}} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{T}^{-T}\bar{\mathcal{A}}\mathcal{T}^T & \mathcal{T}^{-T}\bar{\mathcal{B}} \\ \hline \bar{\mathcal{C}}\mathcal{T}^T & \bar{\mathcal{D}} \end{array}\right]$$

$$\mathcal{T}^T = \left[\begin{array}{cc} I_{n+N+n} & 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & -I_N & 0 \end{array}\right] & I_n \end{array}\right]$$

K をつぎのようにおいたときの，問題 1 の閉ループ伝達関数の実現に一致

$$K(z) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_K & B_{K1} & B_{K2} & B_{K3} \\ 0 & A_0 & B_0 & 0 \\ \hline C_K & D_{K1} & D_{K2} & D_{K3} \end{array}\right]$$

補償器の設計

1. 等価な問題に対する補償器 $\widehat{K}$ を設計

   [Asai and Hara 1999] 観測可能な状態の個数分低次の補償器を設計可能

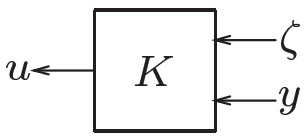
   $\widehat{K}$ の次数 $= (n+N) - N = n$ 次

2. $\widehat{K}$ と Σ を用いて (i) の補償器 K を構成

$$K(z) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_K & B_{K1} & B_{K2} & B_{K3} \\ 0 & A_0 & B_0 & 0 \\ \hline C_K & D_{K1} & D_{K2} & D_{K3} \end{array}\right]$$

- 次数は同じだが，Σ を内部に持つ補償器が得られる
- 計算時間を短縮することはできるか?

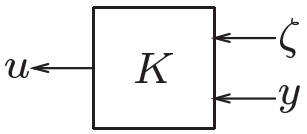
補償器の実装



- 従来手法 1
- 従来手法 2 (可観測正準形)
- 提案手法 1
- 提案手法 2
- 提案手法 3

補償器の実装 (つづき)

- 従来手法 1



$$\begin{bmatrix} x_K[k+1] \\ u[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K[k] \\ \hline \zeta[k] \\ y[k] \end{bmatrix}$$

乗算: $(n+N+1)(n+N+2)$ 回

和算: $(n+N+1)^2$ 回

- 従来手法 2 (可観測正準形)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\ -a_2 & 0 & 1 & & & B_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_{n+N-1} & 0 & & & 1 & B_{n+N-1} \\ -a_{n+N} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{n+N} \\ \hline 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & D_K \end{array}\right]$$

乗算: $3n+3N+2$ 回

和算: $3n+3N+1$ 回

補償器の実装(つづき)

- 提案手法 1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_K & B_{K1} & B_{K2} & B_{K3} \\ 0 & A_0 & B_0 & 0 \\ \hline C_K & D_{K1} & D_{K2} & D_{K3} \end{array}\right]$$

- 提案手法 2

$$A_K : \text{正則}, \quad -A_K T + T A_0 + B_{K1} = 0$$

正則行列 $\begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix}$ を用いて相似変換

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_K & 0 & B'_{K2} & B_{K3} \\ 0 & A_0 & B_0 & 0 \\ \hline C_K & D'_{K1} & D_{K2} & D_{K3} \end{array}\right]$$

$$B'_{K2} := B_{K2} + T B_0, \quad D'_{K1} := D_{K1} - C_K T.$$

- 提案手法 3

$\hat{K}$ を可観測正準形に，

Σ を可制御正準形に変換しておく

計算量の比較

- 計算量(乗算の回数)

	計算量(乗算の回数)
従来手法1	$(n+N+1)(n+N+2)$
従来手法2	$3n+3N+2$
提案手法1	$(n+1)(n+N+2)+N(n+1)$
提案手法2	$(n+1)(n+2)+N(N+2)$
提案手法3	$3n+2N+2$

$\Sigma(z)$ を持つという構造により計算量低減

- $\Sigma(z)=z^{-N}$ の場合

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & I_{N-1}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad B_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

	計算量(乗算の回数)
従来手法1	$(n+N+1)(n+N+2)$
従来手法2	$3n+3N+2$
提案手法1	$(n+1)(n+N+2)$
提案手法2	$(n+1)(n+2)+N$
提案手法3	$3n+N+2$

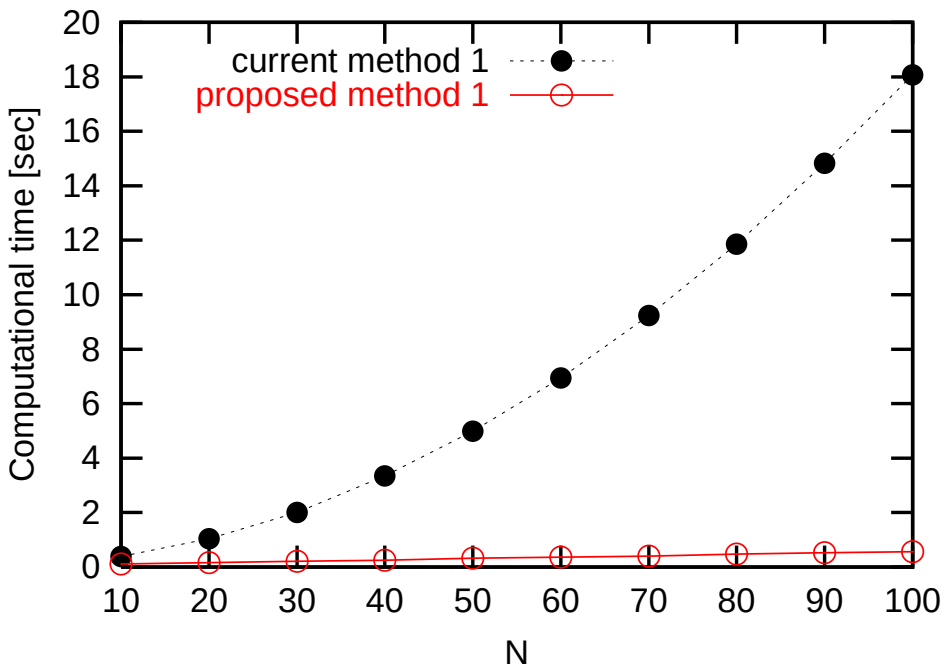
$\Sigma(z)$ の計算量が低い場合，さらに低減可能

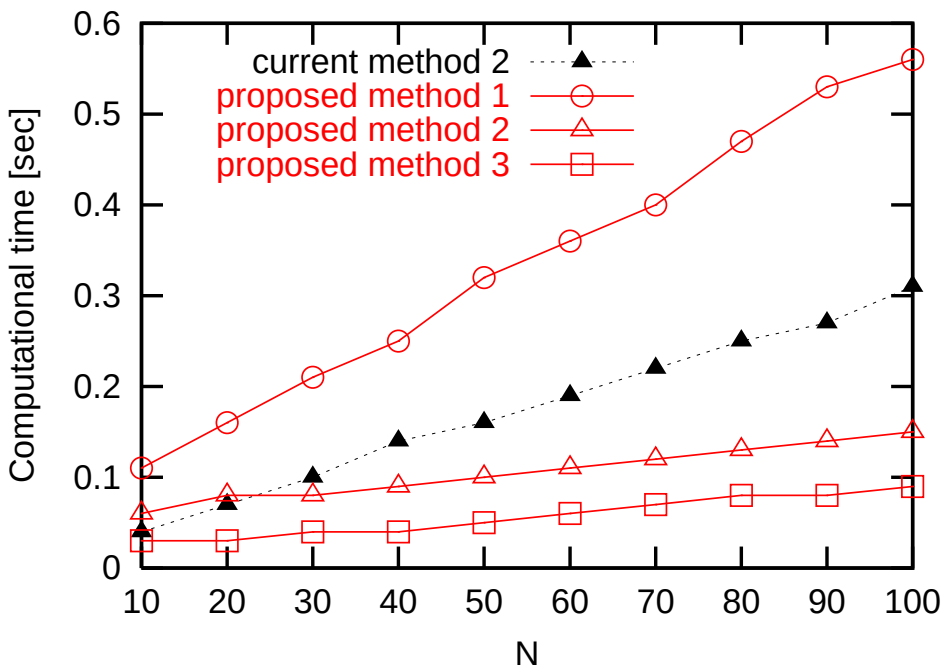
シミュレーション

[離散時間むだ時間系] $\Sigma(z) = z^{-N}$

$n = 5, N = 10, 20, \cdots, 100$

1000 ステップ分の繰返し計算に要した時間を計測





まとめ

- ある安定なサブシステムの入力が観測可能な補償器設計問題において従来の設計手法を用いた場合に比べて実装時の計算量が低い補償器の設計法を提案した．

  - 与えられた問題は，サブシステムの内部状態が観測可能であるとした等価な問題に帰着できる
  - 等価な問題の補償器とサブシステムを用いてもとの問題の補償器を構成できる

    次数はフルオーダの設計を行う場合と同じだが，構造を持つ補償器が得られる

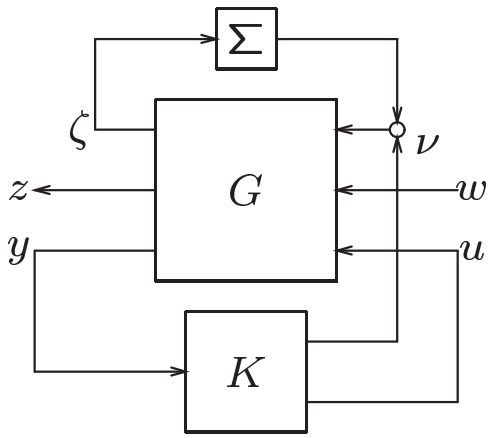
  - 補償器の構造を利用することによって，計算量を低減させることができる
  - サブシステムの計算量が低い場合には，さらに計算量を低減可能
    * サブシステムが離散時間むだ時間要素の場合

      シミュレーションを行い，提案手法の有効性を確認した．

今後の課題

- 双対な問題

  「Σ の入力を観測可能」$\rightarrow$ 「Σ の出力を制御可能」



- 結果の拡張

	Σ の極が安定	Σ の零点が安定
Σ の入力を	観測	制御
Σ の出力を	制御	観測

構造を持つ補償器が得られる