

補償器実装誤差に対するロバスト性の最大化

小林 泰秀¹, 浅井 徹²

¹ 長岡技術科学大学, ² 大阪大学

背景

補償器のデジタル実装を低コストに行うために
安価なマイコン等の利用

- 係数行列の語長短縮
- 正準形等への変換

しかし ...

背景

補償器のデジタル実装を低コストに行うために
安価なマイコン等の利用

- 係数行列の語長短縮
- 正準形等への変換

しかし ... 実装誤差が生じる

- 制御性能の劣化
- 不安定化

そこで ...

背景

補償器のデジタル実装を低コストに行うために
安価なマイコン等の利用

- 係数行列の語長短縮
- 正準形等への変換

しかし ... 実装誤差が生じる

- 制御性能の劣化
- 不安定化

そこで ... 実装誤差を考慮した補償器の設計

従来の設計法と問題点

実装誤差を最大特異値で評価，小ゲイン条件に基づく \mathcal{H}_∞ 補償器の設計法

保守的だが実装誤差を考慮した補償器設計ができる

- リカッチ方程式に基づく方法 [Yang & Wang]
 - 設計パラメータが多い (スカラ $\times 2$, 行列 $\times 2$)
- LMI に基づく方法 [Du et al.]
 - 状態フィードバック

目的

補償器実装誤差を考慮した \mathcal{H}_∞ 補償器の設計手法
実装誤差を最大特異値で評価，小ゲイン条件を利用

- 実装誤差に対する定数スケーリング ... 設計パラメータ
- 出力フィードバック
- 実装誤差に対するロバスト性を最大化

目的

補償器実装誤差を考慮した \mathcal{H}_∞ 補償器の設計手法
実装誤差を最大特異値で評価，小ゲイン条件を利用

- 実装誤差に対する定数スケーリング ... 設計パラメータ
- 出力フィードバック
- 実装誤差に対するロバスト性を最大化

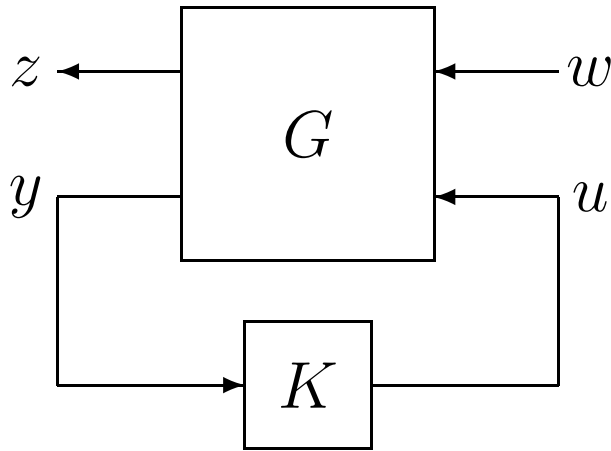
概要:

- 問題設定
- 主要結果 (解析問題，設計問題)
- 応用例 (アクティブ消音制御)
- まとめ

問題設定

問題 1: 任意の Δ ($\bar{\sigma}(\Delta) \leq \frac{1}{\alpha}$) に対して以下を満たし, α を最小化する行列 A_K, B_K, C_K, D_K を求めよ.

- $G(s)$ と $K(s)$ の閉ループ系が内部安定
- 閉ループ系の \mathcal{H}_∞ ノルムが γ 未満



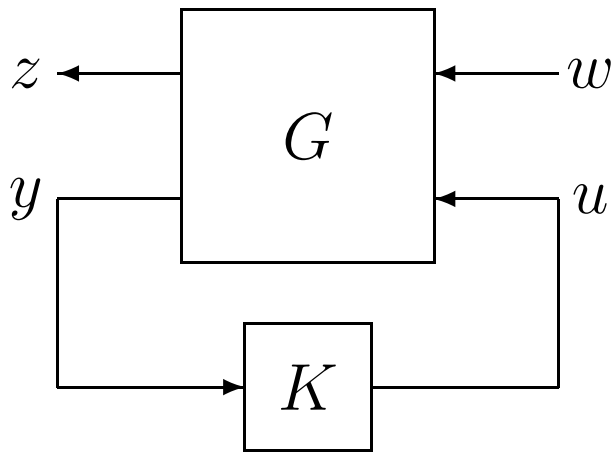
$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K + H_1 \Delta E_1 & B_K + H_1 \Delta E_2 \\ \hline C_K + H_2 \Delta E_1 & D_K + H_2 \Delta E_2 \end{array} \right]$$

問題設定

問題 1: 任意の Δ ($\bar{\sigma}(\Delta) \leq \frac{1}{\alpha}$) に対して以下を満たし, α を最小化する行列 A_K, B_K, C_K, D_K を求めよ.

- $G(s)$ と $K(s)$ の閉ループ系が内部安定
- 閉ループ系の \mathcal{H}_∞ ノルムが γ 未満



$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K + H_1 \Delta E_1 & B_K + H_1 \Delta E_2 \\ \hline C_K + H_2 \Delta E_1 & D_K + H_2 \Delta E_2 \end{array} \right]$$

例: $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_A & \Delta_B \\ \Delta_C & \Delta_D \end{bmatrix}$, $K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K + \Delta_A & B_K + \Delta_B \\ \hline C_K + \Delta_C & D_K + \Delta_D \end{array} \right]$

主要結果

補題 1: (解析) 与えられた A_K, B_K, C_K, D_K が以下を満たすならば, 問題 1 の条件が成立する .

- \hat{G} と K_0 の閉ループ系を内部安定化
- 以下を満たす定数スケーリング d が存在する

$$\left\| \begin{bmatrix} d^{\frac{1}{2}} I & 0 \\ 0 & \gamma^{-\frac{1}{2}} I \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(\hat{G}, K_0) \begin{bmatrix} d^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha} I & 0 \\ 0 & \gamma^{-\frac{1}{2}} I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

$$\hat{G}(s) = \left[\begin{array}{c|ccc|c} A & 0 & B_1 & 0 & B_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ \hline 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 & 0 \end{array} \right], \quad K_0(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_K & H_1 & B_K \\ \hline E_1 & 0 & E_2 \\ C_K & H_2 & D_K \end{array} \right]$$

変数変換の方法 [Masubuchi et al, Asai & Hara] → 設計問題

主要結果(つづき)

定理 1: (設計) 次は等価:

- 補題 1 の条件を満たす A_K, B_K, C_K, D_K が存在する
- 以下を満たす $M_{11}, M_{13}, M_{31}, M_{33}, X, Y$ が存在する

$$\begin{bmatrix} XA^T + M_{31}^T B_2^T + (*)^T & * & * & * & * & * \\ A^T + C_2^T M_{33}^T B_2^T + M_{11} & A^T Y + C_2^T M_{13}^T + (*)^T & * & * & * & * \\ H_2^T B_2^T & -H_1^T (Y - X^{-1}) + H_2^T B_2^T Y - \alpha^2 dI & 0 & 0 & 0 & * \\ B_1^T + D_{21}^T M_{33}^T B_2^T & B_1^T Y + D_{21}^T M_{13}^T & 0 & -\gamma I & * & * \\ d(E_1 + E_2 C_2)X & dE_2 C_2 & 0 & dE_2 D_{21} & -dI & 0 \\ C_1 X + D_{12} M_{31} & C_1 + D_{12} M_{33} C_2 & D_{12} H_2 & D_{11} + D_{12} M_{33} D_{21} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

- 設計問題: d を固定しても非凸 .
- 他の方法 [Scherer et al.] でも非凸の結果が得られる .
- 実装誤差なし or 状態フィードバックの場合: 凸

主要結果(つづき)

定理 1: (設計) 次は等価:

- 補題 1 の条件を満たす A_K, B_K, C_K, D_K が存在する
- 以下を満たす $M_{11}, M_{13}, M_{31}, M_{33}, X, Y$ が存在する

$$\begin{bmatrix} XA^T + M_{31}^T B_2^T + (*)^T & * & * & * & * & * \\ A^T + C_2^T M_{33}^T B_2^T + M_{11} & A^T Y + C_2^T M_{13}^T + (*)^T & * & * & * & * \\ H_2^T B_2^T & -H_1^T (Y - X^{-1}) + H_2^T B_2^T Y - \alpha^2 dI & 0 & 0 & 0 & * \\ B_1^T + D_{21}^T M_{33}^T B_2^T & B_1^T Y + D_{21}^T M_{13}^T & 0 & -\gamma I & * & * \\ d(E_1 + E_2 C_2)X & dE_2 C_2 & 0 & dE_2 D_{21} & -dI & 0 \\ C_1 X + D_{12} M_{31} & C_1 + D_{12} M_{33} C_2 & D_{12} H_2 & D_{11} + D_{12} M_{33} D_{21} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

- 設計問題: d を固定しても非凸 .
- 他の方法 [Scherer et al.] でも非凸の結果が得られる .
- 実装誤差なし or 状態フィードバックの場合: 凸

主要結果(つづき)

定理 1: (設計) 次は等価:

- 補題 1 の条件を満たす A_K, B_K, C_K, D_K が存在する
- 以下を満たす $M_{11}, M_{13}, M_{31}, M_{33}, X, Y$ が存在する

$$\begin{bmatrix}
 XA^T + M_{31}^T B_2^T + (*)^T & * & * & * & * & * \\
 A^T + C_2^T M_{33}^T B_2^T + M_{11} & A^T Y + C_2^T M_{13}^T + (*)^T & * & * & * & * \\
 H_2^T B_2^T & -H_1^T (Y - X^{-1}) + H_2^T B_2^T Y - \alpha^2 dI & 0 & 0 & 0 & * \\
 B_1^T + D_{21}^T M_{33}^T B_2^T & B_1^T Y + D_{21}^T M_{13}^T & 0 & -\gamma I & * & * \\
 d(E_1 + E_2 C_2)X & dE_2 C_2 & 0 & dE_2 D_{21} & -dI & 0 \\
 C_1 X + D_{12} M_{31} & C_1 + D_{12} M_{33} C_2 & D_{12} H_2 & D_{11} + D_{12} M_{33} D_{21} & 0 & -\gamma I
 \end{bmatrix} < 0$$

- 設計問題: d を固定しても非凸 .
- 他の方法 [Scherer et al.] でも非凸の結果が得られる .
- 実装誤差なし or 状態フィードバックの場合: 凸

主要結果(つづき)

定理 2: $M_{11}, M_{13}, M_{31}, M_{33}, X, Y, Q$ が以下を満たすならば, 定理 1 の条件も満たす.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cc} XA^T + M_{31}^T B_2^T + (*)^T & * & * & * & * & * & * & * \\ A^T + C_2^T M_{33}^T B_2^T + M_{11} A^T Y + C_2^T M_{13}^T + (*)^T + Q & * & * & * & * & * & * & * \\ H_2^T B_2^T & (H_2^T B_2^T - H_1)^T Y & -\alpha^2 dI & * & * & * & * & * \\ B_1^T + D_{21}^T M_{33}^T B_2^T & B_1^T Y + D_{21}^T M_{13}^T & 0 & -\gamma I & * & * & * & * \\ d(E_1 + E_2 C_2) X & dE_2 C_2 & 0 & dE_2 D_{21} & -dI & * & * & * \\ C_1 X + D_{12} M_{31} & C_1 + D_{12} M_{33} C_2 & D_{12} H_2 D_{11} + D_{12} M_{33} D_{21} & 0 & -\gamma I & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X \end{array} \right] < 0$$

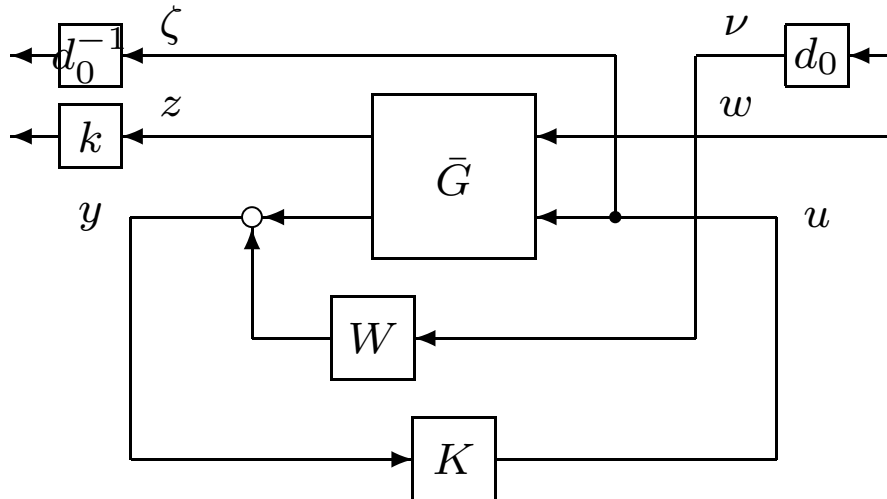
$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} Q & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0$$

- d を固定すれば凸問題
- 定理 1 を用いれば α をさらに低減可能

アクティブ消音制御への応用

元の設計問題: 以下を満たし k を最大化する $K(s)$ を求めよ .

- 閉ループ系を内部安定化
- 閉ループ系の H_∞ ノルムが 1 未満 .



\bar{G} :20 次

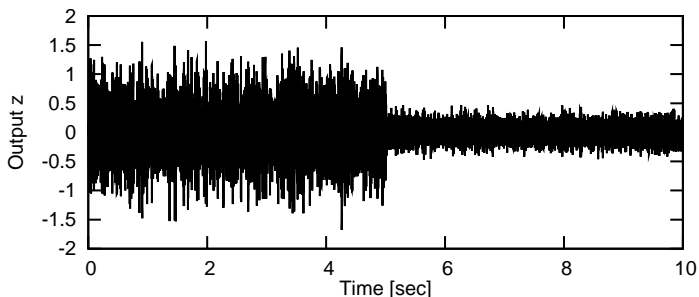
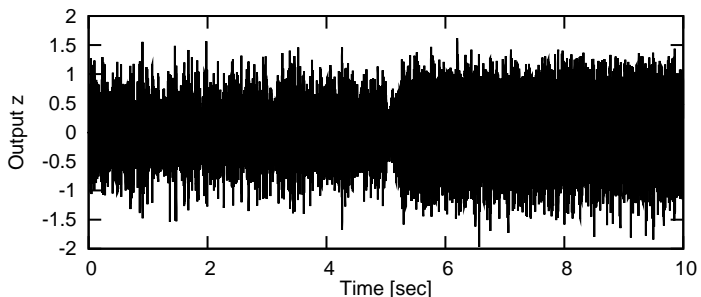
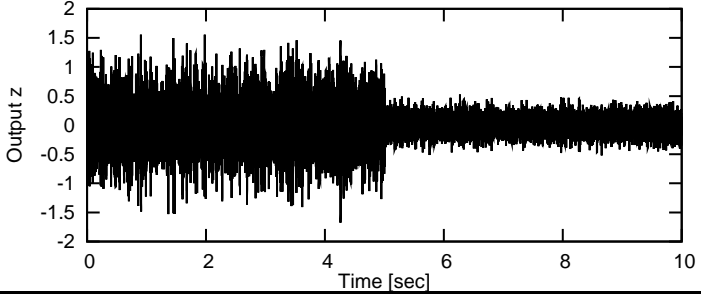
W :2 次

	実装誤差なし	実装誤差あり
<i>hinfsyn</i>	(a) $k = 1.4$	(b) $k = 1.0$
提案手法	—	(c) $k = 1.0$

アクティブ消音制御への応用(つづき)

実装:

- 離散化 (Tustin 変換, 0.25 msec)
- 相似変換 (可制御正準系)
- 倍精度実数

	相似変換なし, $k = 1.4$	相似変換あり, $k = 1.0$
<i>hinfosyn</i>	(a) 	(b) 
提案手法	—	(c) 

まとめ

補償器実装誤差に対するロバスト性を最大化する H_∞ 補償器の設計法

- 設計パラメータが少ない
- 出力フィードバック
- アクティブ消音制御系へ適用

今後の課題

- 離散化と相似変換が実装誤差に与える影響

関連する研究

与えられた無限語長の補償器に対して，感度を最小化する状態空間実現を構成する

- 補償器の伝達関数に対する感度最小化 [Li et al.]
- 閉ループ極に対する感度最小化 [Li]
- 閉ループ系の性能に対する感度最小化 [Fialho & Georgiou]

しかし ...

関連する研究

与えられた無限語長の補償器に対して，感度を最小化する状態空間実現を構成する

- 補償器の伝達関数に対する感度最小化 [Li et al.]
- 閉ループ極に対する感度最小化 [Li]
- 閉ループ系の性能に対する感度最小化 [Fialho & Georgiou]

しかし ... 実際に有限語長で実装したときの性能保証なし

最大特異値で評価することの保守性

係数量子化誤差: $\mu(\Delta) := \max_{i,j} |\delta_{ij}|$

例: $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \end{bmatrix}$

● $\mu(\Delta) = \max \{|\delta_{11}|, |\delta_{12}|\}$

● $\bar{\sigma}(\Delta) = \sqrt{\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2}$

$\bar{\sigma}(\Delta) \leq \frac{1}{\alpha}$ に対して設計

↓

$\mu(\Delta) \leq \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}$ に対して性能保証