実対称行列の固有値と正定性の関連

「現代制御基礎」担当 小林

平成 23 年 6 月 20 日

補題 1 与えられた実対称行列 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ に対して、正則行列 $T \in \mathbf{R}^{n\times n}$ が存在し、次式が成り立つ。

$$A = T^T \Lambda T, \quad \Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad T^T T = T T^T = I \tag{1}$$

ただし、λ_i は、行列 A の固有値（実数）である。

定理 1 (定理※、正定性と固有値) $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は与えられた実対称行列であるとする。$A > 0$ が成り立つための必要十分条件は、A のすべての固有値（実数）が正となることである。

証明 1 定義より、$A > 0$ は次と等価。

$$x^T A x > 0 \quad {}^\forall x \neq 0 \tag{2}$$

上の補題より、これは次と等価。

$$x^T T^T \Lambda T x > 0 \quad {}^\forall x \neq 0 \tag{3}$$

ここで、$y = Tx$ とおくと、上式は次と等価。

$$y^T \Lambda y > 0 \quad {}^\forall y \neq 0 \tag{4}$$

ただし、T が正則であることから、$x \neq 0$ と $y \neq 0$ が等価であることを用いた。

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ と表せば、上式は次と等価。

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots \lambda_n y_n^2 > 0 \quad {}^\forall y \neq 0 \tag{5}$$

これは次と等価。

$$\lambda_i > 0 \quad {}^\forall i \tag{6}$$

（証明終わり）