

## B-2 一次元ダクトの消音制御\*

平成 27 年 5 月 8 日

### 1 目的

騒音を低減する最も簡単な方法は、グラスウール等の吸音材で騒音源を取り囲むことである。しかし、一次元ダクト(単純に管と考えるとすれば良い)は、室内の換気や空調の目的のために設置されるものであるから、騒音がうるさいからと言って、吸音材で塞いでしまうわけにはいかない。このような場合に、音で音を消す能動騒音制御(Active Noise Control)が用いられる。これに対して、吸音材等で騒音低減を図る方法は受動騒音制御(Passive Noise Control)と呼ばれる。

本実験の目的は以下の二つである:

[音響・振動工学の基礎] 空気柱の振動モードを測定し、その結果を理論モデルと比較することにより、音響・振動工学の基礎を理解する。騒音が単一周波数で既知の場合に、音波の重ね合わせにより騒音を制御音で相殺する開ループ制御(能動騒音制御の基礎)を検討する。

[制御工学の基礎] 騒音が単一周波数で未知の場合に、ゲインとむだ時間を用いた単純な閉ループ制御(制御工学の基礎)を行い、開ループ制御と比較する。周波数応答実験とナイキストの安定判別に基づいて閉ループ系の安定性を調べる。広帯域騒音の場合にロバスト制御と性能を比較する。

### 2 実験装置

図 1 に実験装置の概要を示す。ダクトは直径約 10cm、長さ約 1.7m の塩ビ管製で、左端にファンの騒音を模擬するためのスピーカ(SP K1)、ダクト中間に騒音を打ち消す制御音を生成するためのスピーカ(SP K2)が設置されている。ダクト右端は開口端になっており、後に述べる能動騒音制御では、ここから外部に放射される騒音が小さくなるように SP K2 を適切に駆動する。ダクトにはまた、移動式マイク(Mobile Mic.)、リファレンスマイク(Reference Mic.)、エラーマイク(Error Mic.)の三つのマイクが設置されている。これらは、A/D 変換器、

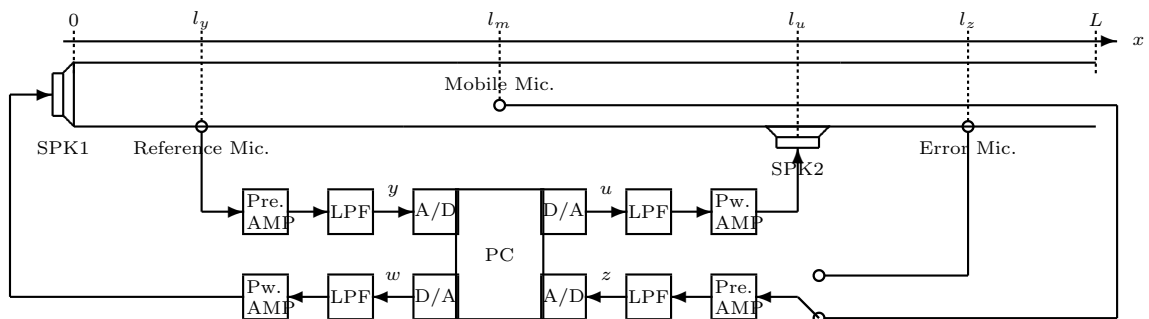


図 1: 実験装置

\*<http://c.nagaokaut.ac.jp/> 授業 3 年学生実験 2015

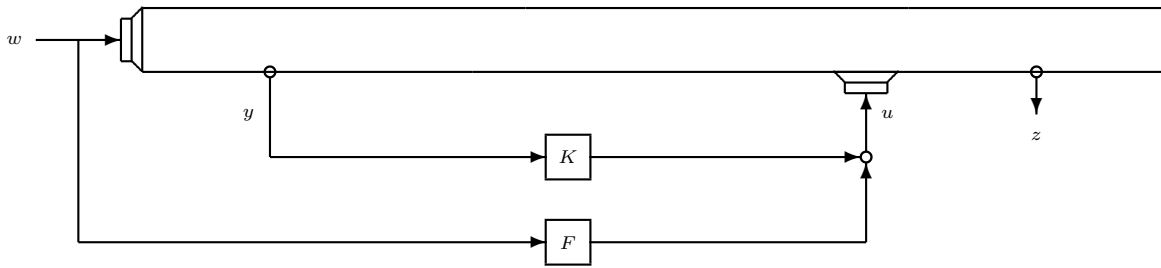


図 2: 開 / 閉ループ制御系のブロック線図

D/A 変換器，ローパスフィルタ (LPF)，パワーアンプ (Pw.AMP)，プリアンプ (Pre.AMP) を介してパソコンに接続され，スピーカを任意の信号  $w$ ,  $u$  で駆動し，マイクの出力  $z$ ,  $y$  を計測できる．

本実験装置は二つの目的に使用される：移動式マイクを用いたダクト内圧力分布および共振周波数の測定（1 日目）と，開 / 閉ループ制御による能動騒音制御（2 日目）である．このため，移動式マイクとエラーマイクを切り換えて使用する．

図 2 に，開 / 閉ループ制御系のブロック線図を示す． $w$ ,  $u$ ,  $z$ ,  $y$  は図 1 と共通で，パソコンから見た制御対象の四つの入出力信号を表す．ただし，表記の簡単のためパワーアンプ等を省略して示す．

[開ループ制御]  $K \equiv 0$  とし， $z$  の振幅が小さくなるよう  $F$  を手動調整する．

[閉ループ制御]  $F \equiv 0$  とし， $z$  の振幅が小さくなるよう  $K$  を設計（第 5 節 ロバスト制御）または手動調整する．

### 3 音響・振動工学の基礎（1 日目）

#### 3.1 調和振動と複素振幅による表現

一般に，騒音や振動は周波数の異なる信号の合成で表され，フーリエ解析による周波数分析が行われる．また，騒音や振動を伴う現実のシステムの多くでは，騒音や振動源として単一周波数の正弦波が与えられた場合，システムの全ての物理量は同一周波数で調和振動する．実際，図 1 の SPK1 の駆動信号を

$$w(t) = \cos \omega t = \operatorname{Re} \{ e^{j\omega t} \}, \quad \omega := 2\pi f \quad (1)$$

と与えたとき，位置  $x$  における圧力変動（大気圧力からの変化分） $p(x, t)$  は

$$p(x, t) = \operatorname{Re} \{ P(x) e^{j\omega t} \} \quad (2)$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ |P(x)| e^{j(\omega t + \angle P(x))} \right\} = |P(x)| \cos(\omega t + \angle P(x)) \quad (3)$$

と表せる．ここで， $P(x)$  は位置  $x$  により定まる複素数で，複素振幅と呼ばれる．その絶対値  $|P(x)|$  は  $p(x, t)$  の振幅，位相角  $\angle P(x)$  は  $w(t)$  に対する  $p(x, t)$  の位相差（進む方向を正）を表す．特に，位置  $x$  に対する圧力振幅  $|P(x)|$  の分布は圧力分布と呼ばれ，これが極大，0 となる位置はそれぞれ圧力の腹，節と呼ばれる．節の前後で位相は 180 度反転する．このように，調和信号を式 (2) のように表すと，全ての信号に共通の成分  $e^{j\omega t}$  を除いて，時刻  $t$  に依存しない  $P(x)$  に関する議論を簡単に行える利点がある．

#### 3.2 空気柱の共振周波数と振動モード

減衰のない長さ  $L$  のダクトモデルを考える（図 1）．ダクトの長さ方向に  $x$  軸をとり， $x = 0$  が閉口端で<sup>1</sup>， $x = L$  が開口端となっているとする．ダクトの断面積を  $S$ ， $c_0$  を音速， $\rho_0$  を空気の密度とする． $x = x_s$  の位置

<sup>1</sup>図 1 の装置では左端が SPK1 で閉じられているが，これを  $x = 0$  は閉口端で，そこに近接して SPK1 が SPK2 のように管に直交して設置されていると考える．

に音源が一個、 $x$  軸に直交して (SPK2 のように) 設置されているとし、その断面積もダクトと同じ  $S$  であるとする。ただし、音源の  $x$  軸方向の幅は無視する。音源の振動板の速度を  $v_S(t)$

$$v_S(t) = \text{Re}\{V_S e^{j\omega t}\} \quad (4)$$

とする。位置  $x$  における圧力を式 (2)、粒子速度を

$$v(x, t) = \text{Re}\{V(x) e^{j\omega t}\} \quad (5)$$

とすると、 $P(x)$  と  $V(x)$  の間に以下の関係式が成り立つ。

$$V(x) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P(x)}{\partial x} \quad (6)$$

次の境界条件を仮定する。

条件 1 閉口端 ( $x = 0$ ): 粒子速度が 0, すなわち,

$$V(0) = 0. \quad (7)$$

条件 2 開口端 ( $x = L$ ): 圧力が 0, すなわち,

$$P(L) = 0. \quad (8)$$

条件 3 音源の位置 ( $x = x_S$ ):

(i) 圧力が連続 (音源の両側の圧力が等しい), すなわち,

$$P(x_S + 0) = P(x_S - 0). \quad (9)$$

(ii) 体積速度の和が 0, すなわち,

$$V(x_S - 0) + V_S - V(x_S + 0) = 0. \quad (10)$$

このとき  $P(x)$  は次式で与えられる [1] .

$$P(x) = \begin{cases} \frac{\rho_0 c_0 \sin(k(x_S - L)) \cos(kx)}{j \cos kL} V_S & (0 \leq x \leq x_S) \\ \frac{\rho_0 c_0 \sin(k(x - L)) \cos(kx_S)}{j \cos kL} V_S & (x_S \leq x \leq L) \end{cases} \quad (11)$$

ここで  $k$  は波数で、 $k := \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0}$  と定義される。  $|P(x)|$  が無限大となる周波数が共振周波数であり、分母  $\cos kL = 0$  より、無数に存在する。低い周波数から一次共振周波数  $f_1$ 、二次共振周波数  $f_2$ 、... と定義すると、これらは

$$f_{m+1} = \frac{(2m+1)c_0}{4L} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

と与えられる。本モデルでは減衰を考慮していないため、共振周波数における  $|P(x)|$  は無限大に発散するが、現実のシステムには減衰が存在し、一定値に収束する。そのときの圧力分布を理論式と比較するため、 $x = x_S$  で 1 となるよう正規化した圧力振幅を  $\bar{P}(x)$  と定義すると次式が成り立つ。

$$\bar{P}(x) := \frac{P(x)}{P(x_S)} = \begin{cases} \frac{\cos(kx)}{\cos(kx_S)} & (0 \leq x \leq x_S) \\ \frac{\sin(k(x - L))}{\sin(k(x_S - L))} & (x_S \leq x \leq L) \end{cases} \quad (13)$$

### 3.3 理論式の導出

ここでは説明の簡単のため  $x_S = 0$  の場合についてのみ示す<sup>2</sup>。その前にまず、調和振動時の一様な管内の圧力分布が、二つの任意定数により定まることを示す。よく知られているように、管内を伝播する音波は平面波と見なすことができ、その振る舞いは一次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

に従う。この一般解は二つの方向に伝播する進行波を用いて

$$p(x, t) = f(t - x/c_0) + g(t + x/c_0) \quad (15)$$

と書ける。ここで、 $f(\bullet)$ 、 $g(\bullet)$  は初期状態に依存する任意の関数で、それぞれ  $x$  の正方向、負方向に伝播する進行波を表す。

演習問題 1 式 (15) が波動方程式を満たすことと、二つの進行波の方向を確認せよ。

スピーカを単一周波数の正弦波で駆動した場合、管内の空気は同じ周波数で調和振動する。このとき、式 (2) より、式 (15) の複素振幅は

$$P(x) = Ae^{-jkx} + Be^{jkx} \quad (16)$$

となる。ここで、 $A$ 、 $B$  はそれぞれ  $x$  の正方向、負方向に伝播する進行波成分を表す複素数である。

演習問題 2 このことを確認せよ。

以上より、調和振動における一様な管内の音圧分布を求めることは、未知定数  $A$ 、 $B$  を決定することに等しい。

理論式導出の概要は次の通りである。まず、開口端の境界条件  $P(L) = 0$  を式 (16) に代入すると、 $A$  によって  $B$  が表せる（開口端で反射が生じることを意味する）。一方、左端はスピーカによって閉じられており、スピーカコーン紙によりそこに近接する空気の粒子速度が式 (4) によって  $V(0) = V_S$  と指定される。直接圧力が指定されないが、圧力と速度の関係式 (6) を用いることにより、 $A$ 、 $B$  に関する二つ目の条件が得られる。よって、 $A$ 、 $B$  が  $V_S$  で表され、管内圧力分布  $P(x)$  が  $V_S$  の式として得られる。

圧力と速度の関係式 (6) は運動量保存則から導出される。これは、力  $f(t)$  を受ける質量  $m$  の質点の場合

$$m \frac{dv(t)}{dt} = f(t) \quad (17)$$

を考えるとわかりやすい。すなわち、管内の位置  $x \sim x + \Delta x$  に長さ  $\Delta x$  の微小区間をとると、その質量は  $\rho_0 S \Delta x$ 、位置  $x$  の端面に右向きにかかる力は  $p(x, t)S$ 、位置  $x + \Delta x$  の端面に左向きにかかる力は  $p(x + \Delta x, t)S$ 、であることから、運動方程式 (17) は次のようになる。

$$(\rho_0 S \Delta x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -S \Delta x \frac{p(x + \Delta x, t) - p(x, t)}{\Delta x} \quad (18)$$

よって、 $\Delta x \rightarrow 0$  の極限をとると次式が成り立つ。

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (19)$$

演習問題 3 上式右辺に負号が入るのはなぜか。

さらに、複素振幅を考えると式 (6) を得る。

演習問題 4 このことを確認せよ。すなわち、式 (19) から式 (6) を導出せよ。

<sup>2</sup>こうすると、 $0 \leq x \leq x_S$  の領域を考えなくて済む。 $x_S \neq 0$  の場合も、少し複雑になるが基本的には同じ考え方で導出できる。すなわち、 $x = x_S$  の前後で管を二つに分割し、それぞれにおいて式 (16) のように未知定数を二つずつ含む  $P(x)$  の式を連立させ、境界条件を用いれば四つの未知定数が求まり、圧力分布が求まる。

式 (6) にダクト左端 ( $x = 0$ ) の条件  $V(0) = V_S$  を代入すると,  $A, B$  に関する二つ目の条件

$$\rho_0 c_0 V_S = A - B \quad (20)$$

を得る. つまり,  $A$  と  $B$  は  $V_S$  によって与えられ, 圧力分布が定まる.

演習問題 5 式 (20) を導出せよ.

演習問題 6  $A$  を  $V_S$  で表せ (次式が成り立つことを示せ)

$$A = \frac{\rho_0 c_0}{1 + e^{-j2kL}} V_S \quad (21)$$

演習問題 7  $P(x)$  を  $V_S$  で表せ (次式が成り立つことを示せ)

$$P(x) = \frac{j\rho_0 c_0 \sin\left(kL\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right)}{\cos kL} V_S \quad (22)$$

上式は,  $x_S = 0$  とおいた式 (11) に等しい.

(導出終わり)

### 3.4 実験方法

#### 1. 準備

PC 上で次のように入力すると, SPK1 の入力信号  $w(t)$  の振幅, SPK2 の入力信号  $u(t)$  の振幅, 両者の周波数 (共通), および位相 ( $w(t)$  に対する  $u(t)$  の位相遅れ), さらに, 閉ループ制御のゲインとむだ時間 (2 日目の実験で使用) をキーボードから調整することができる:

```
% insmod spkcont_module.o
% ./spkcont_app
```

終了時はメニューに従い q を押してコマンドプロンプトに戻った後, 以下のように入力する:

```
% rmmmod spkcont_module
```

また, 共振周波数の計算値を求める際にダクトの全長  $L$  が必要となるので測定しておくこと. 圧力分布の形状を考察するため, SPK2, リファレンスマイク, エラーマイクの位置  $l_u, l_y, l_z$  も測定するとよい. 音速  $c_0$  を求めるため, 室温も測定すること.

#### 2. 共振周波数の測定

- (1) 可動式マイクを SPK1 に近接させて配置する.
- (2) SPK1 の入力信号  $w(t)$  の振幅を指定値 (当日 TA が指示する. 以下同様) にし, SPK2 の入力信号  $u(t)$  の振幅を 0 に設定する.
- (3) 周波数を最小値から徐々に高くしていき, 可動式マイクの出力信号  $z(t)$  の振幅が極大となる最小の周波数 (1 次共振周波数) を探し, 数値を記録する.
- (4) さらに周波数を高くしていき, 2 次共振周波数を記録する.
- (5)  $w(t)$  の振幅を 0,  $u(t)$  の振幅を指定値に設定し, SPK1 の場合と同様に 1 次および 2 次共振周波数を記録する.

#### 3. 共振モードの測定

- (1)  $w(t)$  の振幅を指定値,  $u(t)$  の振幅を 0, 周波数を先に測定した 1 次共振周波数に設定する.
- (2)  $w(t)$  をオシロスコープのトリガとする.
- (3)  $z(t)$  の振幅および  $w(t)$  に対する遅れ時間を測定する.
- (4) 可動式マイクの位置を適当に変えながら上記の測定を繰り返し, 以下のような表に整理する. 位相は周波数を用いて計算すること.
- (5) 2 次共振周波数についても同様に測定する. さらに,  $w(t)$  の振幅を 0,  $u(t)$  の振幅を指定値として測定を繰り返す.

表 1: ?次共振モード ( $w(t)$  の振幅 = ? V,  $u(t)$  の振幅 = ? V)

可動式マイクの位置 $x(\text{m})$	$z(t)$ の振幅 (V)	遅れ時間 (ms)	位相 (deg)
?	?	?	?
⋮	⋮	⋮	⋮
?	?	?	?

### 3.5 レポート

以下の課題について A4 のレポート用紙にまとめて 2 日目の前日 17:00 までに、機械・建設 1 号棟 405 室（小林居室）のメールボックスに提出せよ。ただし、図や実験方法等、このテキストに書いてあることは省略して良い。

課題 1. 式 (12) を用いて共振周波数を計算し、測定値と比較せよ。その違いが生じる理由について考察せよ（ヒント:  $c_0, L$  の測定精度、開口端補正 [2]）。

課題 2. 共振モードの測定結果から、(a) マイクの位置  $x$  と振幅、(b) マイクの位置  $x$  と位相のグラフを描き、その形状について理論的に説明できることを述べよ（ヒント: 式 (13)、節および腹の位置、SPK1,2 の位置）。

課題 3. （開ループ制御の予想） $w(t)$  の振幅を指定値、周波数を 1 次または 2 次共振周波数に設定したとする。このとき、エラーマイク出力  $z$  の振幅を 0 に近づけるために、 $u(t)$  の振幅と  $w(t)$  に対する位相をどう設定すれば良いか。上記 (a) (b) の実験結果を引用しつつ、数値を挙げて具体的に予想せよ（2 日目の実験に用いる）。

## 4 制御工学の基礎（2 日目）

### 4.1 補償器の構造

前述したように、図 2 において  $F \equiv 0$  とし、 $z$  の振幅が小さくなるよう補償器  $K$  を手動調整することを考える。ここではゲイン  $G$  とむだ時間  $\tau$  からなる次の補償器を考える。

$$K(s) = Ge^{-s\tau} \quad (23)$$

ここで、 $G$  と  $\tau$  が調整すべき実数である。この補償器を用いたとき、その入出力信号に次の関係式が成り立つ。

$$u(t) = Gy(t - \tau) \quad (24)$$

### 4.2 実験方法

1. 準備 = 1 日目と同様。

2. 開ループ制御

- (1) 閉ループ制御のゲイン  $G$  は 0 として調整しない。むだ時間  $\tau$  も調整しない。
- (2)  $w(t)$  の振幅を指定値に設定し、周波数を先に測定した 1 次共振周波数に設定する。
- (3) エラーマイクの信号  $z(t)$  の振幅が最小となるように  $u(t)$  の振幅と位相を調整し、その結果を記録する。
- (4) 2 次共振周波数についても同様に実験を行う。

3. 閉ループ制御

- (1)  $u(t)$  の振幅は 0 として調整しない。位相も調整しない。
- (2)  $w(t)$  の振幅を指定値に設定し、周波数を先に測定した 1 次共振周波数に設定する。

- (3) エラーマイクの信号  $z(t)$  の振幅が最小となるように補償器  $K(s)$  のゲイン  $G$  とむだ時間  $\tau$  を調整し、その結果を記録する。発振した場合は直ちに、発振前の値に戻すこと。
- (4) 2次共振周波数についても同様に実験を行う。

#### 4. 周波数応答実験とナイキストの安定判別

- (1) 周波数応答実験を体験する。
- (2) 閉ループ制御で調整したゲイン  $G$  とむだ時間  $\tau$  と共に開ループ系のナイキスト軌跡を描き、閉ループ系の安定性を確認する。
- (3) 閉ループ系のゲイン特性を描き、共振周波数におけるゲインを読み取る。制御あり/なしの比を、閉ループ制御実験の結果と比較する。

#### 5. ロバスト制御による広帯域騒音の抑制

第5節の手法で予め設計した補償器を使って、広帯域外乱の抑制実験を体験する。

### 4.3 ミニレポート

以下の課題について A4 の紙 1 枚に記載し提出しなさい(当日回収します)。

課題 1. 開ループ制御の予想は満足いくものだったか? 満足いくものでなかった場合はその理由(何を間違ったか)、満足いくものだった場合は、さらに改善するための方策について述べよ。

課題 2. 開/閉ループ制御の違いについて述べよ。

## 5 ロバスト制御(旧テキストの抜粋)

本実験は PC を操作して行う。その手順の詳細については以下の URL を参照せよ:

<http://c.nagaokaut.ac.jp> 授業 3年学生実験

### 5.1 はじめに

図 1 において、観測出力  $y$  から、適切な制御入力  $u$  の計算を行う部分は補償器(controller)と呼ばれ、本実験装置では、PC のプログラムとして実装される。良い能動騒音制御性能を得るために、外乱入力  $w$  が評価出力  $z$  に与える影響をできるだけ小さくする補償器を設計することが望ましい。このような補償器を設計するための代表的な問題は、次に示す  $H_\infty$  制御問題である:

問題 1 ( $H_\infty$  制御問題) 与えられた伝達関数  $G(s)$  に対して、図 3 の閉ループ系を内部安定化し、かつ、 $w$  から  $z$  までの伝達関数(閉ループ伝達関数)の  $H_\infty$  ノルムを最小化する補償器  $K(s)$  を求めよ。

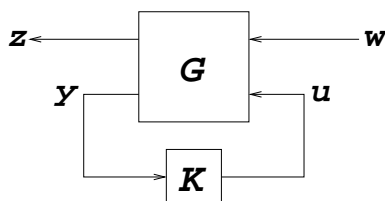


図 3:  $H_\infty$  制御問題

ここで、 $G(s)$  は一般化プラントと呼ばれる。 $\mathcal{H}_\infty$  ノルムは、安定な伝達関数に対して次のように定義される (Bode 線図におけるゲインの最大値と理解すれば良い)。

$$\|M(s)\|_\infty := \max_{\omega} |M(j\omega)| \quad (25)$$

図 1 に対応する一般化プラント  $G(s)$  がわかれば、 $\mathcal{H}_\infty$  制御問題を解くことにより、望ましい補償器を得ることができる。

## 5.2 モデリング

補償器設計を行うためには、一般化プラント  $G(s)$  の情報が必要である。今、 $w, u, z, y$  はスカラーなので、 $G(s)$  は  $2 \times 2$  の伝達関数行列である。これを、

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (26)$$

と表す。本実験では、周波数応答法を用いて、これら 4 つの伝達関数を同定する。

### 5.2.1 周波数応答法

未知システムの伝達関数 (以下、 $M(s)$  とする) を同定するための手法の一つとして、周波数応答法がある。周波数応答法では、未知システムにある周波数  $f$  の正弦波  $u(t)$  を入力し、その出力  $y(t)$  を観測する。未知システムの非線形性が弱く、ほぼ線形系とみなせるような場合には、出力信号  $y(t)$  も同一周波数  $f$  の正弦波となり (図 4)、未知システムの伝達関数  $M(s)$  は、入出力信号の振幅比 (出力/入力)  $A$  と位相差 (入力に対する出力の進み)  $\phi$  によって、

$$M(j\omega) = Ae^{j\phi} \quad (27)$$

と特徴づけられる。周波数  $f$  を細かく変化させながら、振幅比  $A$  と位相差  $\phi$  を記録し、プロットしたものが、未知システムの周波数応答であり、これを最小二乗法等を用いて近似することにより、未知システムの伝達関数  $M(s)$  を決定することができる。

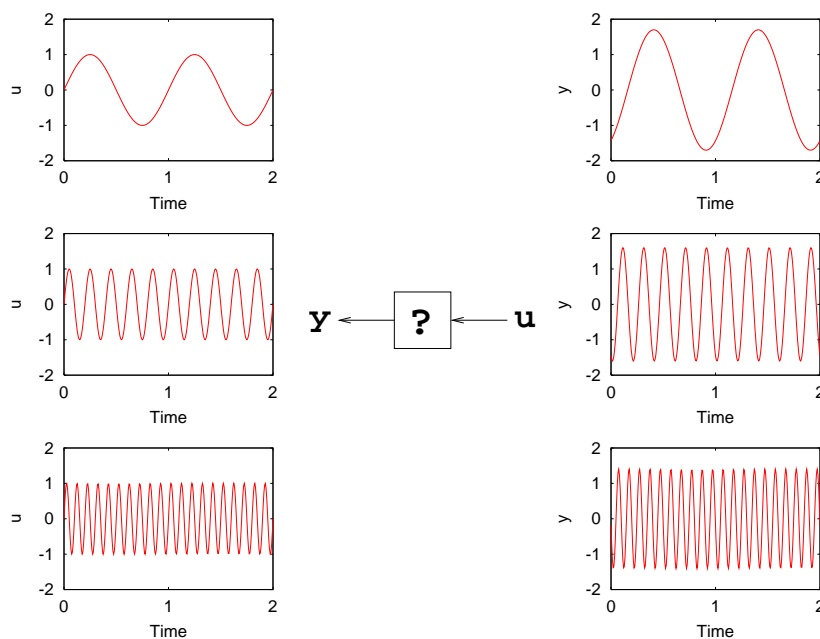


図 4: 周波数応答法



### 5.2.2 モデル化誤差とロバスト制御

実システムの周波数応答に完全に一致する伝達関数 — 真の伝達関数 — を求めることは現実的には不可能であり、通常、両者の間には、伝達関数に近似しきれなかった誤差 — モデル化誤差 — が存在する。このモデル化誤差を無視して、補償器を設計・実装すると、閉ループ伝達関数の  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムが、設計時の見積もりを超えて劣化したり、最悪の場合、制御系が不安定になることがある。後者は致命的であり、この場合、消音制御系は発振し、大振幅の音が二次音源スピーカから出力されることとなる。

以降では前節の方法により求めた伝達関数を、真の伝達関数から区別するために、 $\bar{G}_{zw}(s)$ ,  $\bar{G}_{zu}(s)$ ,  $\bar{G}_{yw}(s)$ ,  $\bar{G}_{yu}(s)$  と表記することにしよう。これらの伝達関数は、ノミナル伝達関数 (Nominal Transfer Function) と呼ばれる。

制御系が不安定となるのを防ぐためには、 $G(s)$  の 4 つの伝達関数のうち、フィードバックループを構成する伝達関数  $G_{yu}(s)$  のモデル化誤差を考慮して  $K(s)$  を設計すれば良い。モデル化誤差の考慮の仕方は幾つかあるが、ここでは、加法的摂動モデルを用いて、モデル化誤差を考慮することにする。この場合、真の伝達関数  $G_{yu}(s)$  は、ノミナル伝達関数  $\bar{G}_{yu}(s)$  を用いて、次のように表される。

$$G_{yu}(s) = \bar{G}_{yu}(s) + W(s)\Delta(s) \quad (28)$$

ここで、右辺第二項が加法的摂動で、 $W(s)$  はその重み関数、 $\Delta(s)$  は正規化された摂動 ( $\mathcal{H}_\infty$  ノルムが 1 以下の安定な伝達関数) である。

$W(s)$  は (28) 式が有効なモデルとなるように決定されなければならない。(28) 式を  $\Delta(s)$  について解き、 $|\Delta(j\omega)| \leq 1$  の条件を適用すると、

$$|G_{yu}(j\omega) - \bar{G}_{yu}(j\omega)| \leq |W(j\omega)| \quad (29)$$

を得る。すなわち、 $G_{yu}(s)$  のモデル化誤差のゲイン特性をプロットし、それを上から覆うように、 $W(s)$  を決定すれば良い。このとき、できるだけ高い制御性能を達成するために、モデル化誤差をできる限りタイトに覆うように  $W(s)$  を決定する。

### 5.3 補償器設計

$G_{yu}(s)$  のモデル化誤差を考慮することにより、問題 1 をつぎのように書き替えることができる。

問題 2 任意の  $\Delta(s) \in \text{BH}_\infty$  に対して、図 3 の閉ループ系を内部安定化し、かつ、 $w$  から  $z$  までの閉ループ伝達関数の  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムを最小化する補償器  $K(s)$  を求めよ。

ここで、 $\text{BH}_\infty$  は、 $\mathcal{H}_\infty$  ノルムが 1 以下の、安定な伝達関数の集合である。また、 $G(s)$  は、

$$G(s) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{zw}(s) & \bar{G}_{zu}(s) \\ \bar{G}_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (30)$$

で与えられる。 $G_{yu}(s)$  は (28) 式で与えられる。

このような、モデル化誤差に対するロバスト安定性と制御性能の最適化を同時に図る補償器設計問題は、ロバスト性能問題と呼ばれ、現実の制御対象に対する補償器設計問題としてよく現れる。この問題の直接的な解法は知られていないが、 $\mathcal{H}_\infty$  制御問題の解法を利用して補償器設計を行うことができる。

問題 2 の閉ループ系から摂動  $\Delta(s)$  を上に引き出して、 $\Delta(s)$  を取り除くと、図 5 の閉ループ系が得られる。

さらに、スケーリングと呼ばれる変数を導入することにより、 $\mathcal{H}_\infty$  制御問題の解法を繰り返し利用して解くことが可能な次の設計問題を得る。

問題 3 (定数スケールド  $\mathcal{H}_\infty$  制御問題) 図 6 の閉ループ系を内部安定化し、かつ、閉ループ伝達関数のノルムを 1 未満とする補償器  $K(s)$  および正数  $d$  を求めよ。さらに、解が存在する範囲で、正数  $k$  を最大化せよ。

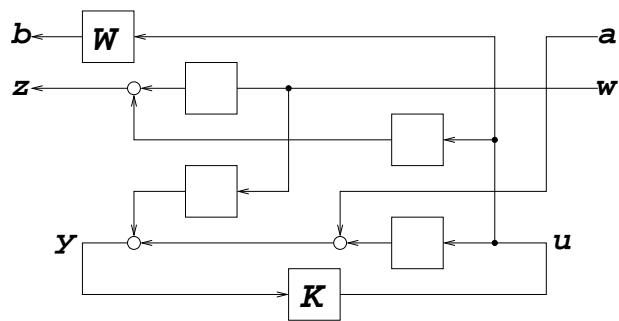


図 5: ロバスト性能問題

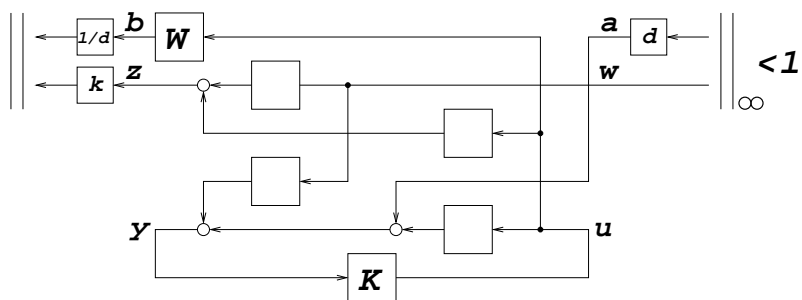


図 6: 定数スケールド  $\mathcal{H}_\infty$  制御問題

## 参考文献

- [1] P. A. Nelson and S. J. Elliott: *Active Control of Sound*, Academic Press (1992)
- [2] 一宮: *機械系の音響工学*, コロナ社 (1992)