

C-1 一次元ダクトの消音制御

1 目的

騒音を低減する最も簡単な方法は、グラスウール等の吸音材で騒音源を取り囲むことである。しかし、一次元ダクト(単純に管と考えるとすれば良い)は、室内の換気や空調の目的のために設置されるものであるから、騒音がうるさいからと言って、吸音材で塞いでしまうわけにはいかない。このような場合に、音で音を消す能動騒音制御(Active Noise Control)が用いられる。これに対して、吸音材等で騒音低減を図る方法は受動騒音制御(Passive Noise Control)と呼ばれる。

本実験の目的は以下の二つである:

[制御基礎(1日目)] 空気柱の振動モードを測定し、その結果を用いて単一周波数騒音の開ループ制御を行うことにより、能動騒音制御の基礎を理解する。

[ロバスト制御応用(2日目)] 周波数応答による制御対象のモデリング手法と、 H_∞ 制御に基づくロバスト補償器の設計法を体験する。

2 実験装置

図1に実験装置の概要を示す。

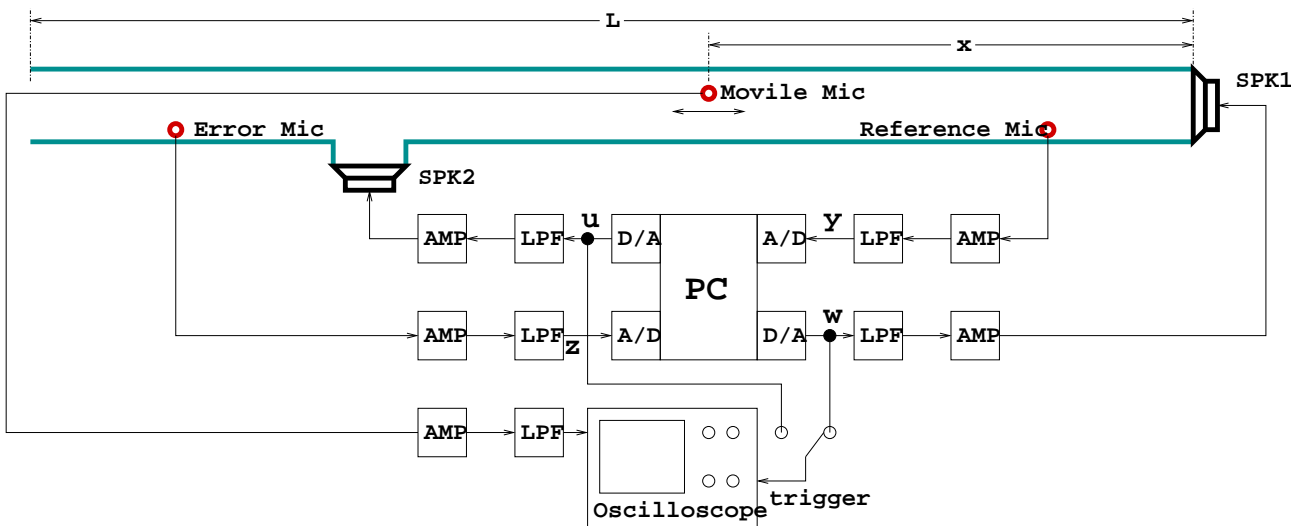


図1: 実験装置

ダクトは直径約10cm、長さ約2mの塩ビ管製で、右端にはファンの騒音を模擬するためのスピーカ(SPK1)が取り付けられている。SPK1は、パソコン(PC)で生成された外乱信号 w により、ローパスフィルタ(LPF)とパワーアンプ(AMP)を介して駆動される。騒音は、リファレンスマイクにより検出され、プリアンプ(AMP)とローパスフィルタを通して観測出力 y としてパソコンに入力される。この情報に基づき、適切な制御入力 u を計算し、制御音発生用のスピーカ(SPK2)を駆動する。騒音と制御音は破壊的干渉(destructive interference)を起こし、SPK2より下流側(図では左側)では、管内の音圧レベルが低減される。その結果はエラーマイクを介して、評価出力 z としてパソコンに入力される。

オシロスコープと可動式マイクは、空気柱の振動モードの測定に用いられる。

3 制御基礎 (1 日目)

3.1 空気柱の共振周波数と振動モード

減衰のない長さ L のダクトモデルを考える。ダクトの長さ方向に x 軸をとり、 $x = 0$ が閉口端で $x = L$ が開口端となっているとする。また、 x 軸方向の幅が 0 の仮想的音源が $x = x_s$ の位置に設置されているとする。ダクトの断面積を S 、 c_0 を音速、 ρ_0 を空気の密度、仮想的音源からダクト内部に注入される空気の体積速度を $qe^{j\omega t}$ 、位置 x における音圧を $p(x)e^{j\omega t}$ 、粒子速度を $v(x)e^{j\omega t}$ とする。 $p(x)$ と $v(x)$ の間には以下の関係式が成り立つ。

$$u(x) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p(x)}{\partial x} \quad (1)$$

ここで境界条件として、開口端において音圧が 0 すなわち $p(L) = 0$ 、閉口端において粒子速度が 0 すなわち $v(0) = 0$ 、を仮定する。このとき、 $p(x)$ は次の式で与えられる [1]。

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\rho_0 c_0 q \sin k(x_s - L) \cos kx}{jS \cos kL} & (0 \leq x \leq x_s) \\ \frac{\rho_0 c_0 q \sin k(x - L) \cos kx_s}{jS \cos kL} & (x_s \leq x \leq L) \end{cases} \quad (2)$$

ここで $k := \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0}$ である。

$|p(x)|$ が無限大となる周波数が共振周波数であり、これを f_r とおくと、 f_r は次のように与えられる。

$$f_r = \frac{(2m+1)c_0}{4L} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

また、 $x = x_s$ で 1 となるよう正規化された $p(x)$ を $\bar{p}(x) := \frac{p(x)}{p(x_s)}$ と定義すると、これは次のように表される。

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} \frac{\cos kx}{\cos kx_s} & (0 \leq x \leq x_s) \\ \frac{\sin k(x - L)}{\sin k(x_s - L)} & (x_s \leq x \leq L) \end{cases} \quad (4)$$

3.2 実験方法

1. 準備

PC 上で次のように入力すると、SPK1 の入力信号 $w(t)$ の振幅、SPK2 の入力信号 $u(t)$ の振幅、両者の周波数 (共通)、および位相 ($w(t)$ に対する $u(t)$ の位相遅れ) をキーボードから調整することができる:

```
% insmod spkcont_module.o
% ./spkcont_app
```

終了時はメニューに従い q を押してコマンドプロンプトに戻った後、以下のように入力する:

```
% rmmmod spkcont_module
```

また、共振周波数の計算値を求める際にダクトの全長が必要となるので測定しておくこと。

2. 共振周波数の測定

- (1) 可動式マイクを SPK1 に近接させて配置する。
- (2) SPK1 の入力信号 $w(t)$ の振幅を最大、SPK2 の入力信号 $u(t)$ の振幅を 0 に設定する。
- (3) 周波数をゆっくり高くしていき、可動式マイクの出力信号 $m(t)$ の振幅が極大となる最小の周波数 (1 次共振周波数) を探し、数値を記録する。
- (4) さらに周波数を高くしていき、2 次共振周波数を記録する。

- (5) $w(t)$ の振幅を 0, $u(t)$ の振幅を最大に設定し, SPK1 の場合と同様に 1 次および 2 次共振周波数を記録する.

3. 共振モードの測定

- (1) $w(t)$ の振幅を最大, $u(t)$ の振幅を 0, 周波数を先に測定した 1 次共振周波数に設定する.
- (2) $w(t)$ をオシロスコープのトリガとする.
- (3) $m(t)$ の振幅および $w(t)$ に対する遅れ時間を測定する.
- (4) 可動式マイクの位置を適当に変えながら上記の測定を繰り返し, 以下のような表に整理する. 位相は周波数を用いて計算すること.

表 1: ?次共振モード ($w(t)$ の振幅 = ?[V], $u(t)$ の振幅 = ?[V])

可動式マイクの位置 x [m]	$m(t)$ の振幅 [V]	$m(t)$ の遅れ時間 [msec]	位相 [deg]
?	?	?	?
⋮	⋮	⋮	⋮
?	?	?	?

- (5) 2 次共振周波数についても同様に測定する. さらに, $w(t)$ の振幅を 0, $u(t)$ の振幅を最大として測定を繰り返す.

4. 開ループ制御

- (1) $w(t)$ の振幅を 0.3 とし, 周波数を先に測定した 1 次共振周波数に設定する.
- (2) エラーマイクの信号 $z(t)$ の振幅が最小となるように $u(t)$ の振幅と位相を調整し, その結果を記録する.
- (3) 2 次共振周波数についても同様に実験を行う.

3.3 レポート

以下の課題について A4 の紙 (5 枚まで) にまとめて 2 日目の前日までに提出せよ. ただし, 図や実験方法等, このテキストに書いてあることは省略して良い.

提出先: 1F 事務室脇の提出ボックス

1. 式 (3) を用いて共振周波数を計算し, 測定値と比較せよ. その違いが生じる理由について考察せよ (ヒント: c_0, L の測定精度, 開口端補正 [2]).
2. 共振モードの測定結果から, (a) マイクの位置 x と振幅, (b) マイクの位置 x と位相のグラフを描き, その形状について理論的に説明できることを述べよ (ヒント: 式 (4), 節および腹の位置, SPK1,2 の位置).
3. 開ループ制御の結果 ($u(t)$ の振幅と位相) と上記 (a) (b) のグラフとの関連について述べよ.

4 ロバスト制御応用 (2 日目)

本実験は PC を操作して行う. その手順の詳細については以下の URL を参照せよ:

http://www.yanabelab.nagaokaut.ac.jp/~kobayasi/ANC/3rd_exp.html

4.1 はじめに

図 1 において，観測出力 y から，適切な制御入力 u の計算を行う部分は補償器 (controller) と呼ばれ，本実験装置では，PC のプログラムとして実装される．良い能動騒音制御性能を得るために，外乱入力 w が評価出力 z に与える影響をできるだけ小さくする補償器を設計することが望ましい．このような補償器を設計するための代表的な問題は，次に示す H_∞ 制御問題である：

問題 1 (H_∞ 制御問題) 与えられた伝達関数 $G(s)$ に対して，図 2 の閉ループ系を内部安定化し，かつ， w から z までの伝達関数 (閉ループ伝達関数) の H_∞ ノルムを最小化する補償器 $K(s)$ を求めよ．

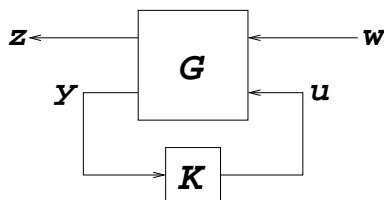


図 2: H_∞ 制御問題

ここで， $G(s)$ は一般化プラントと呼ばれる． H_∞ ノルムは，安定な伝達関数に対して次のように定義される (Bode 線図におけるゲインの最大値と理解すれば良い) ．

$$\|M(s)\|_\infty := \max_{\omega} |M(j\omega)| \quad (5)$$

図 1 に対応する一般化プラント $G(s)$ がわかれば， H_∞ 制御問題を解くことにより，望ましい補償器を得ることができる．

4.2 モデリング

補償器設計を行うためには，一般化プラント $G(s)$ の情報が必要である．今， w, u, z, y はスカラーなので， $G(s)$ は 2×2 の伝達関数行列である．これを，

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

と表す．本実験では，周波数応答法を用いて，これら 4 つの伝達関数を同定する．

4.2.1 周波数応答法

未知システムの伝達関数 (以下， $M(s)$ とする) を同定するための手法の一つとして，周波数応答法がある．周波数応答法では，未知システムにある周波数 f の正弦波 $u(t)$ を入力し，その出力 $y(t)$ を観測する．未知システムの非線形性が弱く，ほぼ線形系とみなせるような場合には，出力信号 $y(t)$ も同一周波数 f の正弦波となり (図 3)，未知システムの伝達関数 $M(s)$ は，入出力信号の振幅比 (出力/入力) A と位相差 (入力に対する出力の進み) ϕ によって，

$$M(j\omega) = Ae^{j\phi} \quad (7)$$

と特徴づけられる．周波数 f を細かく変化させながら，振幅比 A と位相差 ϕ を記録し，プロットしたものが，未知システムの周波数応答であり，これを最小二乗法等を用いて近似することにより，未知システムの伝達関数 $M(s)$ を決定することができる．

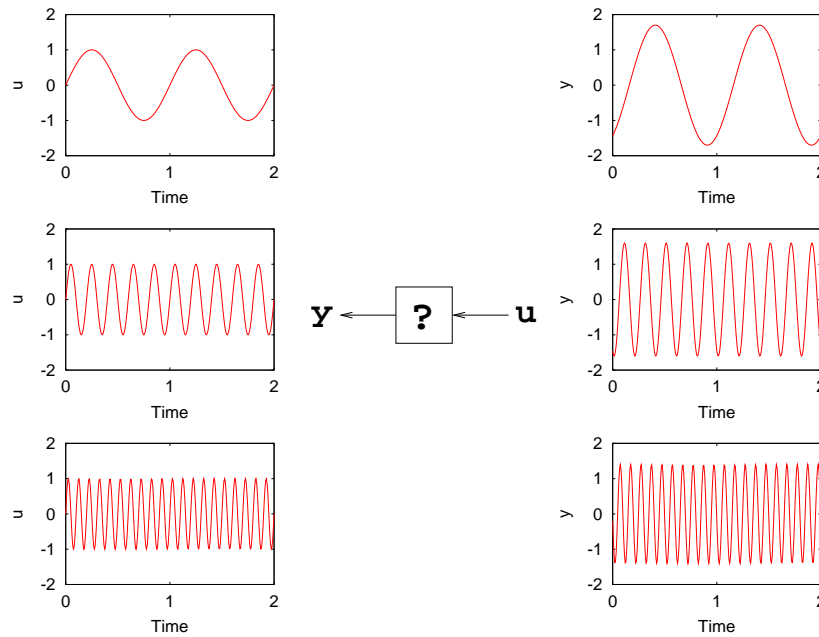


図 3: 周波数応答法

4.2.2 モデル化誤差とロバスト制御

実システムの周波数応答に完全に一致する伝達関数 — 真の伝達関数 — を求めることは現実的には不可能であり、通常、両者の間には、伝達関数に近似しきれなかった誤差 — モデル化誤差 — が存在する。このモデル化誤差を無視して、補償器を設計・実装すると、閉ループ伝達関数の \mathcal{H}_∞ ノルムが、設計時の見積もりを超えて劣化したり、最悪の場合、制御系が不安定になることがある。後者は致命的であり、この場合、消音制御系は発振し、大振幅の音が二次音源スピーカから出力されることとなる。

以降では前節の方法により求めた伝達関数を、真の伝達関数から区別するために、 $\bar{G}_{zw}(s)$, $\bar{G}_{zu}(s)$, $\bar{G}_{yw}(s)$, $\bar{G}_{yu}(s)$ と表記することにしよう。これらの伝達関数は、ノミナル伝達関数 (Nominal Transfer Function) と呼ばれる。

制御系が不安定となるのを防ぐためには、 $G(s)$ の 4 つの伝達関数のうち、フィードバックループを構成する伝達関数 $G_{yu}(s)$ のモデル化誤差を考慮して $K(s)$ を設計すれば良い。モデル化誤差の考慮の仕方は幾つかあるが、ここでは、加法的摂動モデルを用いて、モデル化誤差を考慮することにする。この場合、真の伝達関数 $G_{yu}(s)$ は、ノミナル伝達関数 $\bar{G}_{yu}(s)$ を用いて、次のように表される。

$$G_{yu}(s) = \bar{G}_{yu}(s) + W(s)\Delta(s) \quad (8)$$

ここで、右辺第二項が加法的摂動で、 $W(s)$ はその重み関数、 $\Delta(s)$ は正規化された摂動 (\mathcal{H}_∞ ノルムが 1 以下の安定な伝達関数) である。

$W(s)$ は (8) 式が有効なモデルとなるように決定されなければならない。(8) 式を $\Delta(s)$ について解き、 $|\Delta(j\omega)| \leq 1$ の条件を適用すると、

$$|G_{yu}(j\omega) - \bar{G}_{yu}(j\omega)| \leq |W(j\omega)| \quad (9)$$

を得る。すなわち、 $G_{yu}(s)$ のモデル化誤差のゲイン特性をプロットし、それを上から覆うように、 $W(s)$ を決定すれば良い。このとき、できるだけ高い制御性能を達成するために、モデル化誤差をできる限りタイトに覆うように $W(s)$ を決定する。

4.3 補償器設計

$G_{yu}(s)$ のモデル化誤差を考慮することにより、問題 1 をつぎのように書き替えることができる。

問題 2 任意の $\Delta(s) \in \text{BH}_\infty$ に対して，図 2 の閉ループ系を内部安定化し，かつ， w から z までの閉ループ伝達関数の \mathcal{H}_∞ ノルムを最小化する補償器 $K(s)$ を求めよ．

ここで， BH_∞ は， \mathcal{H}_∞ ノルムが 1 以下の，安定な伝達関数の集合である．また， $G(s)$ は，

$$G(s) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{zw}(s) & \bar{G}_{zu}(s) \\ \bar{G}_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (10)$$

で与えられる． $G_{yu}(s)$ は (8) 式で与えられる．

このような，モデル化誤差に対するロバスト安定性と制御性能の最適化を同時に図る補償器設計問題は，ロバスト性能問題と呼ばれ，現実の制御対象に対する補償器設計問題としてよく現れる．この問題の直接的な解法は知られていないが， \mathcal{H}_∞ 制御問題の解法を利用して補償器設計を行うことができる．

問題 2 の閉ループ系から摂動 $\Delta(s)$ を上に引き出して， $\Delta(s)$ を取り除くと，図 4 の閉ループ系が得られる．

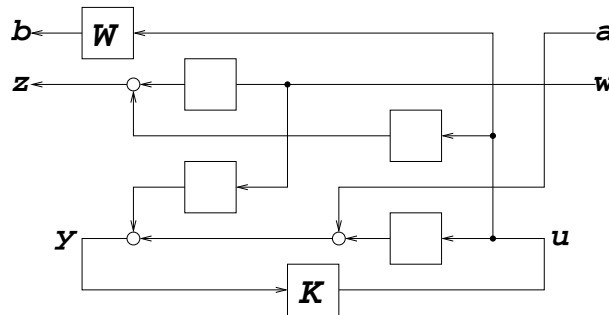


図 4: ロバスト性能問題

さらに，スケーリングと呼ばれる変数を導入することにより， \mathcal{H}_∞ 制御問題の解法を繰り返し利用して解くことが可能な次の設計問題を得る．

問題 3 (定数スケールド \mathcal{H}_∞ 制御問題) 図 5 の閉ループ系を内部安定化し，かつ，閉ループ伝達関数のノルムを 1 未満とする補償器 $K(s)$ および正数 d を求めよ．さらに，解が存在する範囲で，正数 k を最大化せよ．

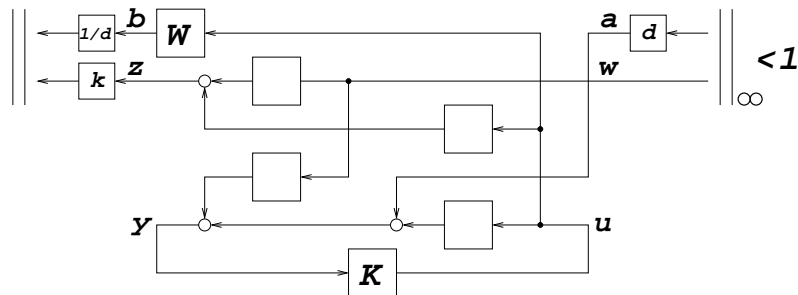


図 5: 定数スケールド \mathcal{H}_∞ 制御問題

参考文献

- [1] P. A. Nelson and S. J. Elliott: *Active Control of Sound*, Academic Press (1992)
- [2] 一宮: 機械系の音響工学, コロナ社 (1992)