

# 二慣性系の外乱抑制問題に対する物理パラメータに陽に依存した補償器の設計

小林泰秀

平成 21 年 2 月 11 日

## 1 はじめに

近年、様々な制御対象に対して、できるだけ簡便な調整で良い制御性能を達成しようとする、汎用のサーボモータが市販されている。これらのサーボモータでは、補償器の構造として、従来経験的に広く用いられているノッチフィルタや PID 制御則が採用されており、慣性や摩擦の推定機構を組合せ、推定された物理パラメータから、ノッチの周波数や補償器のゲインを自動調整し、ユーザの調整がほとんど必要のないチューニングレス制御の機能を持つサーボモータも市販されている (安川電機, 三菱電機等)。しかし、補償器の単純な構造は、制御対象が変更された場合の調整を容易にする一方で、達成可能な性能を制限することになり、その結果、十分な性能が得られるとは限らない。また、従来経験的に採用されている補償器の構造に限定する必要性もない。

一方、 $\mathcal{H}_\infty$  制御等のロバスト制御系設計を行えば、与えられた制御対象に対して、 $\mathcal{H}_\infty$  ノルム等の意味で最適な補償器を得ることができる。しかし、得られる補償器の動特性と、制御対象の物理パラメータの関連は明らかではないため、制御対象が変更される度に補償器の再設計を行わなければならない。この補償器の設計には、行列方程式の解法等の演算が含まれるため、汎用のサーボパック内で行うことは現実的ではない。

そこで本論文では、まず、実際の制御対象に対して、従来サーボパックで採用されている単純な構造の補償器 (比例制御, 比例・積分制御) と、自由度の高い複雑な構造の補償器 ( $\mathcal{H}_\infty$  補償器) を用いて達成可能な性能を実験的に検証する。その結果、補償器の構造が達成可能な制御性能に制約を与えることを示す。

次に、上記の問題を解決するために、安定化補償器のパラメトリゼーションに基づいて、制御対象の物理パラメータを陽に含む補償器を提案する。この補償器は、閉ループ伝達関数を 0 とする、仮想的な補償器の構造に基づいており、従来の単純な構造の補償器よりも良い性能が期待できる。実際にシミュレーションおよび制御実験を行い、提案手法の有効性を検証する。

なお本論文では簡単のため、サーボモータに負荷慣性が一つ接続された二慣性系を考える。また、現実のサーボ系の制御目的には目標値追従と外乱抑制があるが、本論文では外乱抑制を行う場合を考える。また、速度フィードバックかつ、速度制御を行う場合を考える。

本論文の構成は次の通りである。まず、第 2 章で実験装置の概要を示す。第 3 章で種々の補償器を用いて外乱抑制制御実験を行い、補償器の構造と達成可能な性能の関係を検証する。第 4 章で閉ループ伝達関数を 0 とする仮想的補償器の構造を示し、安定化パラメトリゼーションに基づいて、物理パラメータに陽に依存する補償器を提案する。第 5 章でシミュレーションを行い、提案法の有効性を検証する。第 6 章でまとめる。

本論文中に記載する記号は標準的なものである。 $\mathbf{RH}_\infty$  はプロバかつ安定な有理伝達関数を表す。 $G(s) \in \mathbf{RH}_\infty$  の  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムを  $\|G\|_\infty$  で表す。伝達関数行列  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  の状態空間表現を、Doyle の表記を用いて  $G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  と記載する。適当なサイズの伝達関数行列  $\Delta(s)$  と  $M(s)$  の線形分数変換 (LFT) をつぎのように表す。

$$M \star \Delta := M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22}\Delta)^{-1}M_{21} \quad (1)$$

$$\Delta \star M := M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12} \quad (2)$$

ただし、 $M_{ij}$  は  $M$  を適当に分割したブロック行列である<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>\* が具体的に (1), (2) 式のどちらの LFT を意味するかは、行列のサイズから判断可能であるので、本文中では特に明示しない。

## 2 実験装置

実験装置の仕様

外乱トルクを任意に発生させるため、負荷側にもサーボモータを接続する。

## 3 外乱抑制制御実験

本章では、種々の補償器を用いて外乱抑制制御実験を行い、補償器の構造と達成可能な性能の関係を検証する。

外乱抑制制御系のブロック線図

予備実験. 静止摩擦の影響があるので、問題を簡単にするために本論文では、一定速度で運転している状況下での外乱抑制制御を考える。

### 3.1 比例制御

後で示すように、 $K_P < 0$  が安定性の必要十分条件。

$K_P$  と速度変動の振幅のグラフ. 最適値が存在する。

### 3.2 比例・積分制御

同上

### 3.3 $\mathcal{H}_\infty$ 制御

#### 3.3.1 周波数応答実験

二慣性系とほぼ見なせる

#### 3.3.2 モデル化誤差の見積もり

#### 3.3.3 補償器設計

### 3.4 補償器の比較

ボード線図を重ねてプロット→ $\mathcal{H}_\infty$  補償器の特性が最も複雑. ノッチの特性がある. 比例制御時にゲインを上げていくと  $\omega = \sqrt{\frac{K_S}{J_L}}$  で閉ループ伝達関数がピークゲインを持つ. これを回避するために、同じ周波数にノッチを持たせ、補償器のゲインを下げていいると考えられる。

時間応答を重ねてプロット→ $\mathcal{H}_\infty$  制御の外乱抑制効果が最も良い。

以上のことから、補償器の構造に制約が少ないほど、良い性能が得られることが実験的に確認できた. ただし、慣性や剛性が変わった場合に、常に同様の結果が成り立つとは限らない. 以降では、二慣性系の物理モデルに対する外乱抑制制御系の設計問題を考え、補償器の構造と性能の関係について、理論解析を行う。

## 4 物理モデルに対する外乱抑制制御系設計

本章ではまず、二慣性系の物理モデルに対する外乱抑制制御系の設計問題を考え、補償器の構造と性能の関係について理論解析を行う. その結果を踏まえて次に、安定化パラメトリゼーションに基づいて、物理パラメータに陽に依存する補償器を提案する。

(\*\*  $\theta_M, \theta_L, T_M, T_L$  は全て、系全体を同じ回転方向に回転させるように正方向を選ぶ. \*\*)

図 1: Two Inertia System

#### 4.1 問題設定

サーボモータにディスクがシャフトで結合された二慣性系を考える (図 1).

パラメータを次のようにおく.

$\theta_M$ : モータの回転角度 [rad]

$\omega_M$ : モータの回転角速度 [rad/sec]

$J_M$ : モータの慣性モーメント [ $\text{Kg m}^2$ ]

$T_M$ : モータ内部の発生トルク [Nm]

$\theta_L$ : ディスクの回転角度 [rad]

$\omega_L$ : ディスクの回転角速度 [rad/sec]

$J_L$ : ディスクの慣性モーメント [ $\text{Kg m}^2$ ]

$T_L$ : ディスクにかかる負荷トルク [Nm]

$C_L$ : ディスクの回転に伴う減衰係数 [単位??]

$K_S$ : シャフトのねじりばね定数 [Nm / rad]

$C_S$ : シャフトの減衰係数 [単位??]

$T_S$ : シャフトにかかるねじりトルク [Nm]

モータと負荷の相対各変位を  $\theta_r := \theta_M - \theta_L$  とおくと、二慣性系の運動方程式は次のようになる.

$$J_M \dot{\omega}_M = T_M - T_S \quad (3)$$

$$T_S = K_S \theta_r + C_S (\omega_M - \omega_L) \quad (4)$$

$$J_L \dot{\omega}_L = T_L + T_S - C_L \omega_L \quad (5)$$

ここで、状態ベクトル  $x$  を

$$x := \begin{bmatrix} \theta_r \\ \omega_M \\ \omega_L \end{bmatrix} \quad (6)$$

とおくと、 $\begin{bmatrix} T_L \\ T_M \end{bmatrix}$  から  $\begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_M \end{bmatrix}$  までのシステムの状態空間実現が次式のように得られる.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_r \\ \omega_M \\ \omega_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K_S}{J_M} & -\frac{C_S}{J_M} & \frac{C_S}{J_M} \\ \frac{K_S}{J_L} & \frac{C_S}{J_L} & -\frac{C_S + C_L}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_r \\ \omega_M \\ \omega_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_M} \\ \frac{1}{J_L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ T_M \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_r \\ \omega_M \\ \omega_L \end{bmatrix} \quad (8)$$

A 行列が 0 固有値のブロック対角構造を持つように相似変換すると、次式を得る.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K_S}{J_M} & -\frac{C_S}{J_M} & \frac{C_S}{J_M} \\ \frac{K_S}{J_L} & \frac{C_S}{J_L} & -\frac{C_S+C_L}{J_L} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \left| & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_M} \\ \frac{1}{J_L} & 0 \end{array} \right] \\ \hline & \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & & & 0 \\ \hline & \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_S \left( \frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L} \right) & -C_S \left( \frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L} \right) & \frac{C_L}{J_L} & -\frac{1}{J_L} & \frac{1}{J_M} \\ \frac{K_S}{J_L} & \frac{C_S}{J_L} & -\frac{C_L}{J_L} & \frac{1}{J_L} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & & & & \end{array} \right] \quad (9) \\
 = & \quad (10)
 \end{aligned}$$

上の状態空間実現よりこのシステムの伝達関数を求めると、次式が得られる.

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s)} \begin{bmatrix} f(J_M, s) & f(0, s) \\ f(0, s) & f(J_L, s) + C_L s \end{bmatrix} \quad (11)$$

ただし,

$$f(J_M, s) := J_M s^2 + C_S s + K_S, \quad f(J_L, s) := J_L s^2 + C_S s + K_S, \quad f(0, s) := C_S s + K_S, \quad (12)$$

$$\bar{J} := \frac{J_M J_L}{J}, \quad J := J_M + J_L \quad (13)$$

である.

**注意 1** ここで、 $P(s)$  が安定であることに注意する. 二慣性系に対する補償器設計問題ではしばしば、ディスクの回転に伴う減衰を無視し、 $C_L = 0$  と設定される. その結果、制御対象は積分器を持つ不安定系となる. しかし、これは現実的な状況に矛盾する. すなわち、制御対象が積分器を持つことは、外から加わるトルクが 0 の場合、慣性系は初速を維持したまま回転しつづけることを意味する. 現実的には、回転に伴う空気抵抗、軸受の摩擦抵抗等があるため、十分時間が経過した後、慣性系は静止する. 以上のことから本研究では、 $C_L \neq 0$  と仮定する. なお、モータ側の減衰については、負荷側よりも小さい場合が多いため、無視することとした.

このプラントに対して、速度フィードバック補償器  $K(s)$

$$T_M = K(s)\omega_M \quad (14)$$

の設計問題を考える. すなわち、次の問題である.

**問題 1** 図 2 の閉ループ系を考える. ここで  $P(s)$  は (11) 式で与えられる. また、 $W(s) \in \mathbf{RH}_\infty$  は与えられた重み関数であるとする. このとき、次の条件を満足し、かつ、 $\gamma$  を最小化する補償器  $K(s)$  を求めよ.

- (i) 閉ループ系が内部安定
- (ii)  $\|WT\|_\infty < 1$  が成り立つ
- (iii)  $\|G_{cl}\|_\infty < \gamma$  が成り立つ

ただし、 $T(s)$  は相補感度関数、 $G_{cl}(s)$  は閉ループ伝達関数で、それぞれ次式で与えられる.

$$T(s) = \frac{P_{22}(s)K(s)}{1 - P_{22}(s)K(s)}, \quad G_{cl}(s) = P_{11}(s) + \frac{P_{12}(s)K(s)P_{21}(s)}{1 - P_{22}(s)K(s)} = \frac{P_{11}(s) - (P_{11}(s)P_{21}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s))K(s)}{1 - P_{22}(s)K(s)} \quad (15)$$

上の条件 (i) はノミナル閉ループ系の内部安定性を保証する. 条件 (ii) は、 $P_{22}(s)$  が乗法的摂動を持つ場合のロバスト安定性を保証する. 条件 (iii) は、ノミナル閉ループ系の外乱抑制性能を保証する.

以下ではまず、問題 1 に対して  $\mathcal{H}_\infty$  制御系設計を適用すると、閉ループ系の  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムをほぼ 0 とし、かつ、物理パラメータを陽に含むシステムに近い補償器が得られることを、数値例により示す.

なお、以降では簡単のため、(ii) のロバスト安定性を考慮しない場合を考える.

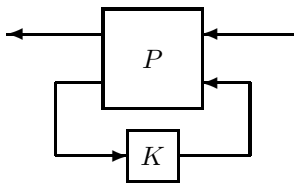


図 2: Closed-loop system

## 4.2 数値例と動機付け

第 3 章で実験的に示した補償器の構造と性能の関係を明らかにするために、物理モデルに基づいて補償器を設計を行い、達成される性能を比較する。

現有の実験装置を参考にして、各パラメータを以下のようにおく。

$$J_M = 0.116 \times 10^{-4}, \quad J_L = 1.936 \times 10^{-4}, \quad K_S = 500, \quad C_S = 0.01, \quad C_L = 0.01 \quad (16)$$

このとき、開ループ系の共振周波数  $f_a$  は、

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_S \left( \frac{1}{J_L} + \frac{1}{J_M} \right)} = 1076[\text{Hz}] \quad (17)$$

となる。

### 4.2.1 補償器の構造を制約しない場合

補償器の構造を制約しない場合には、問題 1 は、 $P(s)$  を一般化プラントとする  $\mathcal{H}_\infty$  制御問題となる。そこで、Matlab `hinfsv` を用いて補償器設計を行った。結果を図 3 の赤い実線に示す。共振周波数において (緑の破線)、ノッチ特性を有することがわかる。また、このとき閉ループ系の  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムは  $3.1 \times 10^{-4}$  となった。この値は、`hinfsv` のオプション

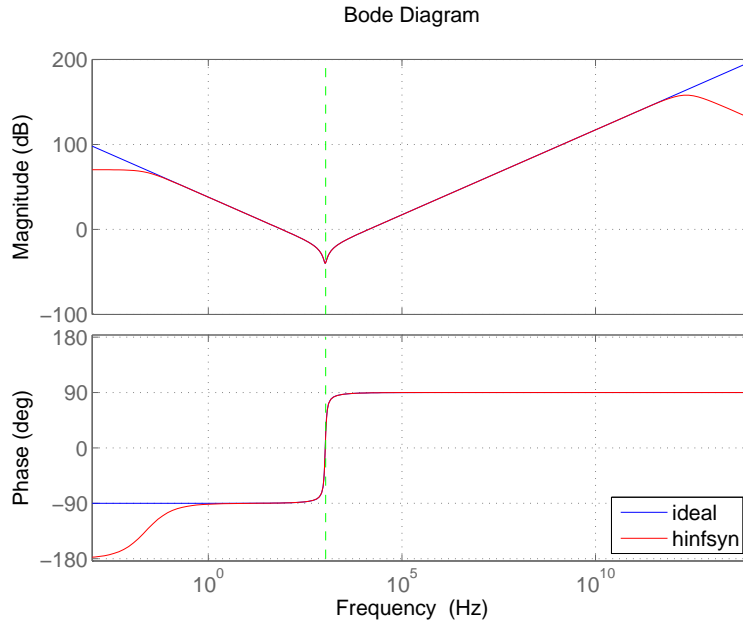


図 3: controllers

TOLGAM を小さくすることにより、さらに小さくなることから、 $\mathcal{H}_\infty$  ノルムを限りなく 0 に近付ける安定化補償器が存在すると考えられる。しかし、物理パラメータが変化するとき、 $\mathcal{H}_\infty$  制御問題を解く必要がある。また、物理パラメータと得られる補償器の関係も明らかではない。

一方、図 3 の青線は、閉ループ伝達関数を 0 とする  $K(s)$  を表している。これを仮想的補償器とよび、 $K_*(s)$  と記載することとする。 $K_*(s)$  は次のように定まる。

命題 1 (15) 式において,  $G_{cl}(s) = 0$  となるための必要十分条件は,  $K(s) = K_*(s)$  が成り立つことである. ただし,  $K_*(s)$  は次式で与えられる.

$$K_*(s) = \frac{f(J_M, s)}{s} = J_M s + C_S + \frac{K_S}{s} \quad (18)$$

証明 1 (15) 式より明らかに次式が成り立つ.

$$K_*(s) = \frac{P_{11}(s)}{P_{11}(s)P_{22}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s)} \quad (19)$$

上式に (11) 式を代入すると,

$$K_*(s) = \frac{\frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22}}{\frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22} - \frac{f^2(0, s)}{(f(J_L, s) + C_L)^2} P_{22}^2} = \frac{f(J_M, s)}{f(J_M, s) - \frac{f^2(0, s)}{f(J_L, s) + C_L}} \frac{sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} \quad (20)$$

$$= \frac{f(J_M, s) (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))}{f(J_M, s) (f(J_L, s) + C_L s) - f^2(0, s)} = \frac{f(J_M, s) (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))}{s (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))} = \frac{f(J_M, s)}{s}. \quad (21)$$

ただし,

$$f(J_M, s)f(J_L, s) = s^2 Jf(\bar{J}, s) + f^2(0, s) \quad (22)$$

が成り立つことを用いた. □

$K_*(s)$  は物理パラメータに陽に依存しており, 物理パラメータが変更された場合でも, 容易に構成することが可能である. しかし,  $K_*(s)$  はインプロバであり, そのまま実装することはできない. プロバとするために, 微分要素  $s$  を不完全微分で近似することも考えられる. しかし, 近似した結果が内部安定化補償器となる保証はない.

さらに, そのような近似された補償器は原点極を除く右半平面に不安定極をもたないが, 上記 hinfsyn を用いて得られた補償器は不安定極を持つ. 補償器の極と零の配置を図 4 に示す. 実軸上の, 虚軸にほぼ対称な位置に, 二個の不安定極を持つことがわかる. このような補償器は,  $K_*(s)$  を単純に近似することによっては得られない.

不安定な補償器は制御ループが切れた場合の安全性の観点から敬遠される場合も多いが,  $\mathcal{H}_\infty$  制御系設計のように, 積極的に性能を最適化した場合にしばしば不安定な補償器が得られることがある. すなわち, 性能改善が重要視される場合には, 不安定な補償器を表現できるような, 自由度が高い補償器構造が望ましい場合がある. このような不安定な補償器は, 従来の比例制御, 比例・積分制御では表現できない.

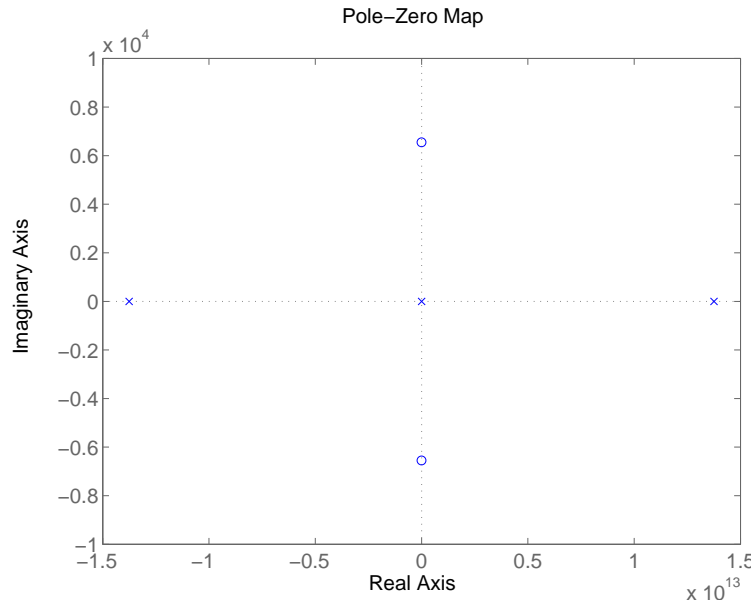


図 4: 極零配置

#### 4.2.2 比例制御の場合

補償器を  $K(s) = K_P$  (定数) とおくと, 閉ループ系が内部安定となるための必要十分条件は  $K_P < 0$  となる (以降に示す補題 2 を参照のこと).

種々の  $K_P$  に対して閉ループ系のゲイン特性をプロットした結果を図 5 に示す.  $K_P$  の絶対値が小さくなるにつれて, 低周波数域のゲインが高くなっている. 特に  $K_P$  が 0, すなわち開ループの場合には,  $T_L$  から  $\omega_L$  の伝達関数が原点に近い極を持つため, 低周波数域で高いゲインを示す. 一方,  $K_P$  の絶対値が大きくなるにつれて, 緑の破線で示した周波数  $f_L$

$$f_L := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_S}{J_L}} \quad (23)$$

で高いピークゲインを持つ. これは, 次のように解釈できる:  $K_P \rightarrow -\infty$  とした制御系では, 高いフィードバックゲインのために, 駆動側モータは外乱によらずほぼ静止し, 等価的に,  $J_M \rightarrow \infty$  の制御系と同じ振舞をする. よって, 比例

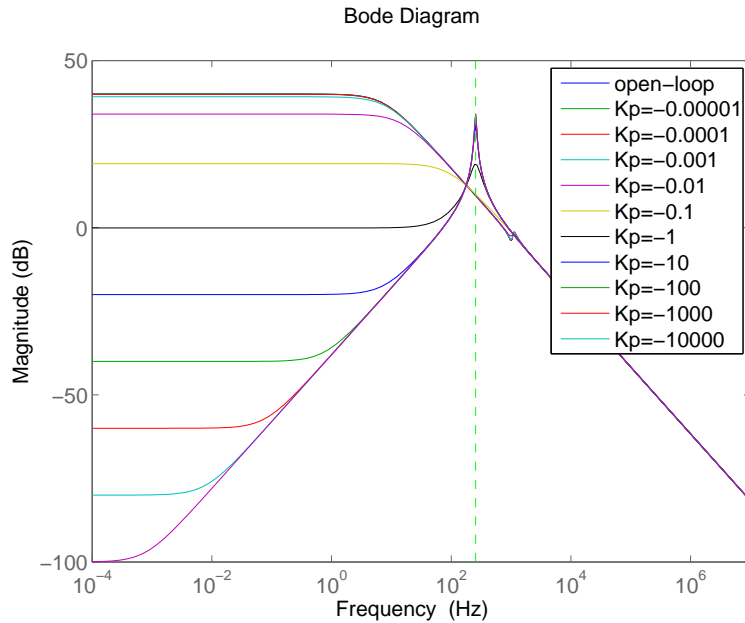


図 5: Closed-loop gain characteristic by P control

制御の場合には, 閉ループ系の  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムを 0 に限りなく近付けることはできない.

以上のことから, 二慣性系の外乱抑制問題において, 補償器の構造が, 達成可能な性能に制約を与えていることを, 数値例により示した. 次節では, このことを理論的に示す.

### 4.3 補償器の構造と達成可能な性能の関係

本節では, 安定化補償器のパラメトリゼーションに基づいて問題 1 に対する解析解を構成し, それに基づいて補償器の構造と達成可能な性能の関係について検討する.

#### 4.3.1 安定化補償器のパラメトリゼーション

安定化補償器のパラメトリゼーションを用いて, 問題 1 の解  $K(s)$  を解析的に構成することを考える. 安定化補償器のパラメトリゼーションに関して, 次の定理が知られている [1]

**定理 1 (安定化補償器のパラメトリゼーション)**  $P(s)$  が安定であるとする. このとき, 図 2 の制御系を内部安定化する, すべての安定化補償器は次式で与えられる.

$$K(s) = \frac{-Q(s)}{1 - P_{22}(s)Q(s)} \quad (24)$$

ただし,  $Q(s)$  は任意の安定伝達関数である.

(24) 式を用いて,  $T(s)$ ,  $G_{cl}(s)$  のパラメトリゼーションを与える. まず, (11) 式より, 次式が成り立つ.

$$P_{11}(s) = \frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22}(s), \quad P_{12}(s) = P_{21}(s) = \frac{f(0, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22}(s) \quad (25)$$

$T(s)$ ,  $G_{cl}(s)$  のパラメトリゼーションは次のように与えられる.

$$T(s) = \frac{P_{22}(s)K(s)}{1 - P_{22}(s)K(s)} = \frac{\frac{-P_{22}Q}{1 - P_{22}Q}}{1 + \frac{P_{22}Q}{1 - P_{22}Q}} = -P_{22}Q \quad (26)$$

$$G_{cl}(s) = \frac{P_{11}(s) - (P_{11}(s)P_{22}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s))K(s)}{1 - P_{22}(s)K(s)} \quad (27)$$

$$= \frac{\frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22} + \left( \frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22}^2 - \frac{f(0, s)^2}{(f(J_L, s) + C_L s)^2} P_{22}^2 \right) \frac{Q}{1 - P_{22}Q}}{1 + \frac{P_{22}Q}{1 - P_{22}Q}} \quad (28)$$

$$= \frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22} (1 - P_{22}Q) + \left( \frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} - \frac{f(0, s)^2}{(f(J_L, s) + C_L s)^2} \right) P_{22}^2 Q \quad (29)$$

$$= \frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22} - \frac{f(0, s)^2}{(f(J_L, s) + C_L s)^2} P_{22}^2 Q \quad (30)$$

$$= \frac{f(J_M, s)}{sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s)} - \frac{f^2(0, s)}{(sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))^2} Q \quad (31)$$

以上より, 問題 1 は次の問題に変換される.

**問題 2** プラント  $P(s)$  を (11) 式で与える.  $W(s) \in \mathbf{RH}_\infty$  は与えられた重み関数であるとする. このとき, 次式を満足し,  $\gamma$  を最小化する  $Q(s) \in \mathbf{RH}_\infty$  を求めよ.

(i) 次式が成り立つ.

$$\|WP_{22}Q\|_\infty < 1 \quad (32)$$

(ii) 次式が成り立つ.

$$\left\| \frac{f(J_M, s)}{f(J_L, s) + C_L s} P_{22} - \frac{f(0, s)^2}{(f(J_L, s) + C_L s)^2} P_{22}^2 Q \right\|_\infty < \gamma \quad (33)$$

本論文では, モデル化誤差が存在しない理想的な状況において, 与えられた補償器の構造で達成可能な限界性能を明らかにするために, (i) の条件を考慮しない場合を考える.

#### 4.3.2 補償器の構造が制約されない場合

安定化補償器のパラメトリゼーションにおいて,  $G_{cl}(s) = 0$  を満足する  $Q(s)$  を  $Q_*(s)$  とおくと, (15) 式より, 次式が成り立つ.

$$Q_*(s) = \frac{f(J_M, s) (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))}{f^2(0, s)} \quad (34)$$

$Q_*(s)$  の分子多項式の次数が 5 次, 分母多項式の次数が 2 次であることから,  $Q_*(s)$  はインプロパであり, これに対応する実装可能な補償器は存在しないが, 分母多項式に安定な 3 次多項式をかけ, 全体として  $Q(s) \in \mathbf{RH}_\infty$  となるようにすれば, 対応する補償器は実装可能である. さらに, 分母多項式にかかる 3 次多項式が十分 1 に近くなるように調整すれば,  $\|G_{cl}(s)\|_\infty$  はいくらでも 0 に近づく. すなわち, 次の補題が成り立つ.

**補題 1** 問題 2 に対して,  $\gamma \rightarrow 0$  とする  $Q(s) \in \mathbf{RH}_\infty$  が存在する.

**証明 2**  $Q_*(s)$  を (34) 式で与える. 正数  $\lambda$  を用いて,  $f_\lambda(s)$  を

$$f_\lambda(s) := (\lambda s + 1)^3 \quad (35)$$

とおくと, これは安定な 3 次多項式となり,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_\lambda(s) = 1 \quad (36)$$



が成り立つ。このとき、 $f^2(0, s) = (C_S s + K_S)^2$  も安定多項式であることから、次式の  $Q_\lambda(s)$  は  $\mathbf{RH}_\infty$  に属す。

$$Q_\lambda(s) = Q_*(s) \frac{1}{f_\lambda(s)} = \frac{f(J_M, s) (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))}{f^2(0, s) f_\lambda(s)} \quad (37)$$

さらに、 $\lambda \rightarrow 0$  のとき、 $Q_\lambda(s) \rightarrow Q_*(s)$ 、 $\gamma \rightarrow 0$  が成り立つ。このとき、 $K(s)$  は

$$K(s) = \frac{-Q_\lambda(s)}{1 - P_{22}(s)Q_\lambda(s)} = \frac{-\frac{f(J_M, s) (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))}{f^2(0, s) f_\lambda(s)}}{1 - \frac{f(J_M, s) (f(J_L, s) + C_L s)}{f^2(0, s) f_\lambda(s)}} = \frac{-f(J_M, s) (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))}{f^2(0, s) f_\lambda(s) - f(J_M, s) (f(J_L, s) + C_L s)} \quad (38)$$

$$= \frac{-f(J_M, s) (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))}{f^2(0, s) (f_\lambda(s) - 1) - s (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))} \quad (39)$$

となり、 $f_\lambda(s) \rightarrow 1$  のとき、 $K(s) \rightarrow K_*(s)$  が成り立つ。□

すなわち、補償器の構造が制約されない場合、 $\gamma$  をいくらでも小さくする補償器が存在する。

### 4.3.3 比例制御の場合

#### 補題 2

$$K(s) = K_P \quad (40)$$

とおく。ただし、 $K_P$  は定数である。このとき、 $K(s)$  が安定化補償器となるための必要十分条件は、

$$K_P < 0 \quad (41)$$

が成り立つことである。

**証明 3** (\*\* 要修正。  $C_L$  を導入 \*\*) 閉ループ系の特性多項式は、 $1 - P_{22}(s)K_P = 0$  より、

$$1 - \frac{J_L s^2 + C_S s + K_S}{s(J_M J_L s^2 + J(C_S s + K_S))} K_P = 0 \quad (42)$$

$$J_M J_L s^3 + (J C_S - J_L K_P) s^2 + (J K_S - C_S K_P) s - K_S K_P = 0 \quad (43)$$

フルビッツの安定判別を行うために、

$$H_3 = \begin{bmatrix} J C_S - J_L K_P & -K_S K_P & 0 \\ J_M J_L & J K_S - C_S K_P & 0 \\ 0 & J C_S - J_L K_P & -K_S K_P \end{bmatrix} \quad (44)$$

とおくと、閉ループ系が安定であるための必要十分条件は、

$$|H_1| = J C_S - J_L K_P > 0 \quad (45)$$

$$|H_2| = (J C_S - J_L K_P)(J K_S - C_S K_P) + K_S K_P J_M J_L \quad (46)$$

$$|H_3| = -K_S K_P |H_2| > 0 \quad (47)$$

である。最後の式より、 $K_P < 0$  でなければならない。このとき、 $|H_1| > 0$  が成り立つ。また、

$$|H_2| = J C_S (J K_S - C_S K_P) - J_L K_P J K_S + J_L C_S K_P^2 + K_S K_P J_M J_L \quad (48)$$

$$= J C_S (J K_S - C_S K_P) - J_L K_P J_M K_S - J_L^2 K_P K_S + J_L C_S K_P^2 + K_S K_P J_M J_L \quad (49)$$

$$= J C_S (J K_S - C_S K_P) - J_L^2 K_P K_S + J_L C_S K_P^2 > 0. \quad (50)$$

以上より、閉ループ系が内部安定となるための必要十分条件は  $K_P < 0$  が成り立つことである。□

次の補題は、比例制御で達成可能な  $\gamma$  を特徴付ける。

**補題 3** プラント  $P(s)$  を (11) 式で与える。  $K(s) = K_P$  負定数とする。このとき、次式が成り立つ。

$$\inf_{K_P} \gamma > 0 \quad (51)$$

証明 4  $\gamma \rightarrow 0$  が達成されたと仮定する。このとき、零周波数において  $G_{cl}(0) = 0$  が成り立たなければならない。ここで、(11) 式より、

$$P(0) = \begin{bmatrix} P_{11}(0) & P_{12}(0) \\ P_{21}(0) & P_{22}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{C_L K_S} \begin{bmatrix} K_S & K_S \\ K_S & K_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_L} & \frac{1}{C_L} \\ \frac{1}{C_L} & \frac{1}{C_L} \end{bmatrix} \quad (52)$$

が成り立つことから、次式が成り立つ。

$$G_{cl}(0) = P_{11}(0) + \frac{P_{12}^2(0)K_P}{1 - P_{22}(0)K_P} = \frac{1}{C_L} + \frac{\frac{K_P}{C_L^2}}{1 - \frac{K_P}{C_L}} = \frac{1}{C_L - K_P} \quad (53)$$

よって、 $K_P \rightarrow -\infty$  でなければならない。ところがこのとき、

$$\begin{aligned} G_{cl}(j\omega) &= P_{11}(j\omega) + \frac{P_{12}^2(j\omega)K_P}{1 - P_{22}(j\omega)K_P} = P_{11}(j\omega) - \frac{P_{12}^2(j\omega)}{P_{22}(j\omega)} \\ &= \frac{f(J_M, s)}{sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s)} - \frac{f^2(0, s)}{(sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))(f(J_L, s) + C_L s)} \\ &= \frac{f(J_M, s)(f(J_L, s) + C_L s) - f^2(0, s)}{(sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s))(f(J_L, s) + C_L s)} \\ &= \frac{s}{f(J_L, s) + C_L s} \end{aligned}$$

が成り立ち、非零の周波数  $s = j\omega$ ,  $\omega \neq 0$  において、

$$|G_{cl}(j\omega)| > 0 \quad (54)$$

が成り立つ。特に、 $\omega = \sqrt{\frac{K_S}{J_L}}$  のとき、

$$G_{cl}(j\omega) = \frac{j\sqrt{\frac{K_S}{J_L}}}{(C_S + C_L)j\sqrt{\frac{K_S}{J_L}}} = \frac{1}{C_S + C_L} \quad (55)$$

となり、減衰係数  $C_S, C_L$  が小さいとき、 $|G_{cl}(j\omega)|$  は大きなゲイン特性を示す。このことは  $\gamma \rightarrow 0$  の仮定に反する。以上より、(51) 式が成り立つ。□

以上より、外乱抑制制御系設計問題において、補償器の構造に制約がなければ  $\gamma \rightarrow 0$  を達成する補償器が存在するが、補償器の構造が制約される場合には  $\gamma \rightarrow 0$  とする補償器は存在しない。にもかかわらず、従来、比例制御や比例・積分制御等の簡単な構造の補償器が採用されている。次節では、補償器の構造が性能に与える制約を緩和するために、閉ループ伝達関数を 0 とする仮想的補償器の構造を含む補償器の設計法を示す。

#### 4.4 物理パラメータに陽に依存する補償器

本節では、補償器の構造が性能に与える制約を緩和するために、(39) 式の  $K(s)$  を用いた補償器の設計手法を提案する。(39) 式の  $K(s)$  はプラントのパラメータに陽に依存した補償器になっており、三次の安定多項式  $f_\lambda(s)$  を適切に設定すれば、 $\gamma \rightarrow 0$  を達成することができる。ただし、この次数は 5 次であり、 $\mathcal{H}_\infty$  補償器の次数 (プラントの次数と同一) の 3 次よりも大きい。その結果、従来の補償器に比べて実装は容易ではない。そこで、本節では低次の補償器を構成することを考える。その結果、得られる補償器は、(18) 式に示した仮想的補償器の分母多項式を変更した構造を持つことを示す。

##### 補題 4

$$K(s) = \frac{-f(J_M, s)}{\lambda f^2(0, s) - s} \quad (56)$$

とおく。ただし  $\lambda$  は正数であるとする。このとき、 $K(s)$  が安定化補償器となるための必要十分条件は、次式が成り立つことである。

$$\lambda > \frac{J_M J_L}{J C_S (J K_S + C_L C_S) + J_M^2 C_L K_S + J_M C_L^2 C_S} \quad (57)$$

(56) 式の補償器は、仮想的補償器  $K_*(s)$  の分母多項式を変更した構造を持つことがわかる。

(57) 式より、 $\lambda$  を十分大きく選べば閉ループ系は内部となる。  $\lambda \rightarrow 0$  のとき  $K(s) \rightarrow K_*(s)$  より、(57) 式が成り立つ範囲で  $\lambda$  をできるだけ小さく選べば、外乱抑制性能が向上することが期待できる。

**証明 5** (39) 式において、

$$f_\lambda(s) = \lambda (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s)) + 1 \quad (58)$$

とおくと (56) 式が成り立つ。 よって、(56) 式の  $K(s)$  が内部安定化補償器となるための必要十分条件は、(58) 式の  $f_\lambda(s)$  が安定多項式となることである。  $f_\lambda(s)$  を整理すると、次式が成り立つ。

$$\frac{f_\lambda(s)}{\lambda} = J_M J_L s^3 + (J_C S + C_L J_M) s^2 + (J K_S + C_L C_S) s + C_L K_S + \frac{1}{\lambda} \quad (59)$$

よって、フルビッツの安定定理より、 $f_\lambda(s)$  が安定多項式となるための必要十分条件は、次の条件が成り立つことと等価である。

$$|H_3| > 0, \quad H_3 := \begin{bmatrix} J_C S + C_L J_M & C_L K_S + \frac{1}{\lambda} & 0 \\ J_M J_L & J K_S + C_L C_S & 0 \\ 0 & J_C S + C_L J_M & C_L K_S + \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$|H_2| > 0, \quad H_2 := \begin{bmatrix} J_C S + C_L J_M & C_L K_S + \frac{1}{\lambda} \\ J_M J_L & J K_S + C_L C_S \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$|H_1| > 0, \quad H_1 := J_C S + C_L J_M \quad (62)$$

各物理パラメータが正数であることから、 $|H_1| > 0$  が成り立つことは明らか。 同様に、 $|H_2| > 0$  と  $|H_3| > 0$  は等価な条件である。 よって、 $f_\lambda(s)$  が安定多項式となるための必要十分条件は、 $|H_2| > 0$  すなわち

$$(J_C S + C_L J_M)(J K_S + C_L C_S) - J_M J_L \left( C_L K_S + \frac{1}{\lambda} \right) > 0 \quad (63)$$

が成り立つことである。 上式を整理すると、(57) 式と等価な条件となる。 □

補題 4 の補償器の次数は 2 次で、プラントの次数 (3 次) よりも低い。 実装は容易だが、自由度が低く、望ましい性能が得られないことが考えられる。 そこで、3 次の補償器の設計法を以下に示し、以降ではこの補償器を本論文で提案する補償器として用いる。

**補題 5 (提案手法)**

$$K(s) = \frac{-f(J_M, s)}{(a_1 s + a_0) f^2(0, s) - s} \quad (64)$$

とおく。 ただし  $a_0, a_1$  は正数であるとする。 このとき、 $K(s)$  が安定化補償器となるための必要十分条件は、次式が成り立つことである。

$$** a_0, a_1 \text{ の条件式 } ** \quad (65)$$

(65) 式より、 $a_0, a_1$  を十分大きく選べば閉ループ系は内部安定となる。  $a_0, a_1 \rightarrow 0$  のとき  $K(s) \rightarrow K_*(s)$  より、(65) 式が成り立つ範囲で  $a_0$  と  $a_1$  をできるだけ小さく選べば、外乱抑制性能が向上することが期待できる。

**証明 6** (39) 式において、

$$f_\lambda(s) = (a_1 s + a_0) (sJf(\bar{J}, s) + C_L f(J_M, s)) + 1 \quad (66)$$

とおくと (64) 式が成り立つ。 よって、(64) 式の  $K(s)$  が内部安定化補償器となるための必要十分条件は、(66) 式の  $f_\lambda(s)$  が安定多項式となることである。  $f_\lambda(s)$  を整理すると、次式が成り立つ....

## 5 数値例を用いた検証

第 4.2 章の数値例を用いてシミュレーションを行い、提案法の有効性を検証する。

## 6 結言

### 参考文献

- [1] 劉: 線形ロバスト制御, コロナ社 (2002)