

1・4 偏微分方程式への応用 — 熱伝導問題とその解の拡張 —

長岡技術科学大学 小林泰秀

平成 27 年 1 月 7 日

教科書 [1] では、棒の両端の温度が 0 の場合を考えている。これを一般化し、両端の温度が 0 と限らないとした次の問題を考える。

問題 1 (熱伝導問題) 以下を満たす $u(x, t)$ を求めよ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (1)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f_0(x) \quad (3)$$

ここで、 k は正数、 l は棒の長さで、 $f_0(x)$ は $t = 0$ における初期温度分布を表す関数であるとする。

この問題の解は次のように与えられる。

補題 1 以下の $u(x, t)$ が (1), (2), (3) 式を満たす。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}} \sin \frac{n \pi x}{l} \right\} + f_{\infty}(x) \quad (4)$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l (f_0(x) - f_{\infty}(x)) \sin \frac{n \pi x}{l} dx \quad (5)$$

ここで、 $f_{\infty}(x)$ は、最終的な温度分布すなわち、 T_0 と T_l を結ぶ直線を表し、次式で与えられる。

$$f_{\infty}(x) := \left(1 - \frac{x}{l}\right) T_0 + \frac{x}{l} T_l \quad (6)$$

両端の温度が 0 の場合、 $f_{\infty}(x)$ は恒等的に 0 となる。教科書にはこの結果が示されている。この場合、(4) 式の無限級数は、指数関数 $e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}}$ の働きにより、 $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。一方、両端の温度が 0 と限らない場合でも、 $t \rightarrow \infty$ の極限は $f_{\infty}(x)$ によって与えられ、無限級数の項は同様に 0 に収束する。すなわち、この解の構造は、 $t \rightarrow \infty$ の極限からの差分 $u(x, t) - f_{\infty}(x)$ が、フーリエ級数と指数関数で表現されたものになっている。

以下、証明を示す。導出の大部分は $T_0 = T_l = 0$ の場合と同様であるので、違う点に絞って示す。

証明 1 まず、

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (7)$$

とおくと失敗することを示しておく。この場合、(2) 式より、

$$u(0, t) = X(0)T(t) = T_0$$

すなわち、 $X(0) = T_0 = 0$ でなくてはならない ($T(t)$ が恒等的に 0 でないことと、 T_0 が定数であることから)。しかし、今 T_0 が 0 と限らない問題を考えているので、結局、(7) 式の仮定は妥当でないことがわかる。

この問題を解決するために、(6) 式の $f_{\infty}(x)$ を追加して

$$u(x, t) = X(x)T(t) + f_{\infty}(x) \quad (8)$$

とおく。この場合、(2) 式より、

$$u(0, t) = X(0)T(t) + T_0 = T_0$$

すなわち、 $X(0) = 0$ となる。また、

$$u(l, t) = X(l)T(t) + T_l = T_l$$

より、 $X(l) = 0$ となり、ここまで (8) 式の仮定に問題は生じない。

$f_{\infty}(x)$ は直線であり、 x で二回偏微分すると 0 となる。よって、(1) 式は $T_0 = T_l = 0$ の場合と同様に、次式と等価となる。

$$\frac{dT}{dt} - \lambda T = 0 \quad (9)$$

$$k \frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda X = 0 \quad (10)$$

以下教科書と同様に、 $\lambda \geq 0$ の場合は意味のある解が求まらない ($X(x)$ が恒等的に 0 となる) ため除外され、 $\lambda < 0$ のとき、

$$X(x) = A \sin \frac{n \pi x}{l} \quad (11)$$

とでき (A は任意定数、 n は任意の正整数)、 λ は

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2 k}{l^2} \quad (12)$$

となり、 $T(t)$ は

$$T(t) = B e^{-\lambda t} \quad (13)$$

となる (B は任意定数)¹。

これらを (8) 式に代入し、改めて任意定数を $C_n := AB$ とおけば、

$$u(x, t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}} \sin \frac{n \pi x}{l} + f_{\infty}(x) \quad (14)$$

¹わからない場合は聞いてください。説明を追記します

となる。さらに、 n が任意の正整数であることと、(1) 式が u について線形であることから、無限級数を用いて (4) 式のようにおいた u も (1) 式を満たす。

最後に初期条件を考える。(4) 式で $t = 0$ とおくと、

$$u(x, 0) = f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} + f_{\infty}(x) \quad (15)$$

より、

$$f_0(x) - f_{\infty}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} \quad (16)$$

が成り立つ。すなわち、 C_n は、奇関数 $f_0(x) - f_{\infty}(x)$ のフーリエ係数である。ここで、 $f_0(x) - f_{\infty}(x)$ は、 $-l < x < l$ の範囲で奇関数となっていればよく、元々の定義域である $0 < x < l$ では、任意の関数で構わないことに注意する ($-l < x < l$ で奇関数となるように、 $-l < x < 0$ に関数をコピーすれば良い)。以上より、(5) 式が成り立つ。(証明終わり)

参考文献

- [1] 高遠 節夫, 斎藤 斉 ほか: 新訂 応用数学; 大日本図書 (2005)