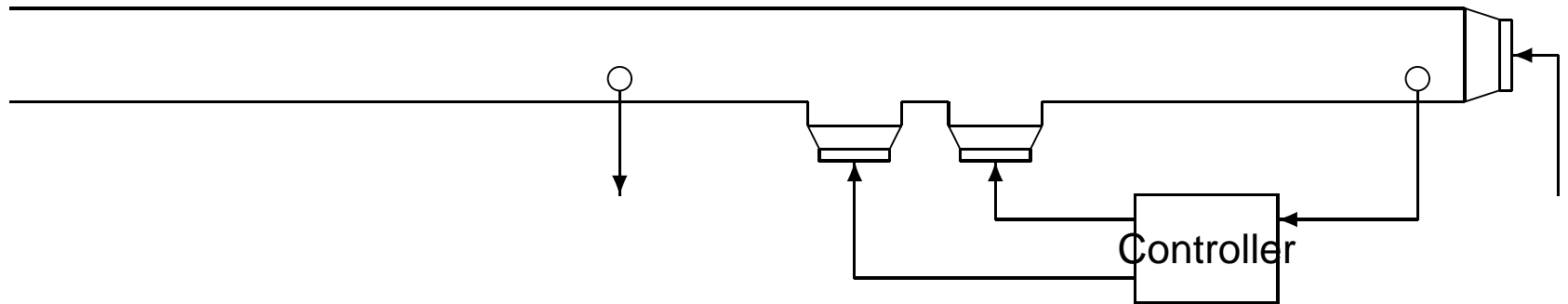


二音源を用いたダクト能動騒音制御系の ロバスト安定性解析

小林泰秀（長岡技術科学大学） 藤岡久也（京都大学）

背景



- 指向性制御音源 (Swinbanks の音源) ... ダクト上流方向への音を相殺するよう音源を追加

背景(つづき)

- 従来研究(実験) [Kobayashi& Fujioka 2007] [Kijimoto et al. 2001] [Winkler& Elliott 1995] ... 無指向性制御音源に対する利点
 - 騒音抑制性能が向上する
 - 補償器のゲインが小さくなる
 - リファレンスマイク出力が増幅する現象を回避可能
 - 制御入力の振幅が小さくなる

背景(つづき)

- 従来研究 (実験) [Kobayashi& Fujioka 2007] [Kijimoto et al. 2001] [Winkler& Elliott 1995] ... 無指向性制御音源に対する利点
 - 騒音抑制性能が向上する
 - 補償器のゲインが小さくなる
 - リファレンスマイク出力が増幅する現象を回避可能
 - 制御入力の振幅が小さくなる
- 問題
 - 理論的保証が十分でない
 - 理論解析 ... 無限長ダクトを仮定
 - 指向性性制御音源の周波数特性
 - リファレンスマイクの出力が増幅する理由

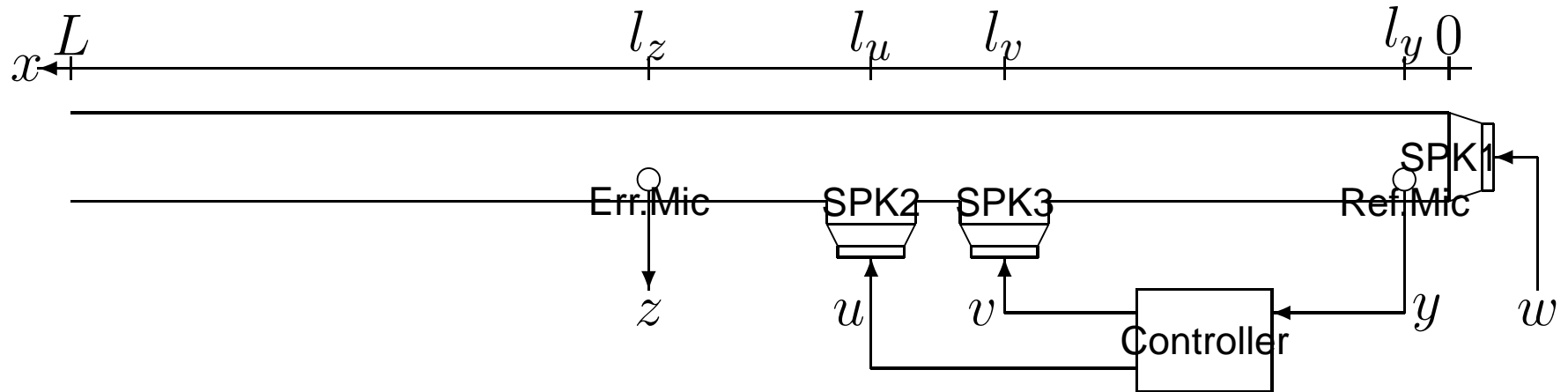
背景(つづき)

- 目的 ... 有限長で反射が存在するダクトに対して，指向性制御音源により騒音抑制性能が向上する条件を明らかにする

背景(つづき)

- 目的 ... 有限長で反射が存在するダクトに対して，指向性制御音源により騒音抑制性能が向上する条件を明らかにする
- 方針
 1. 完全騒音除去 ...
安定化補償器により騒音の完全除去が可能
 2. ロバスト安定性解析 ...
完全騒音除去の下で許容される安定余裕を比較

問題設定



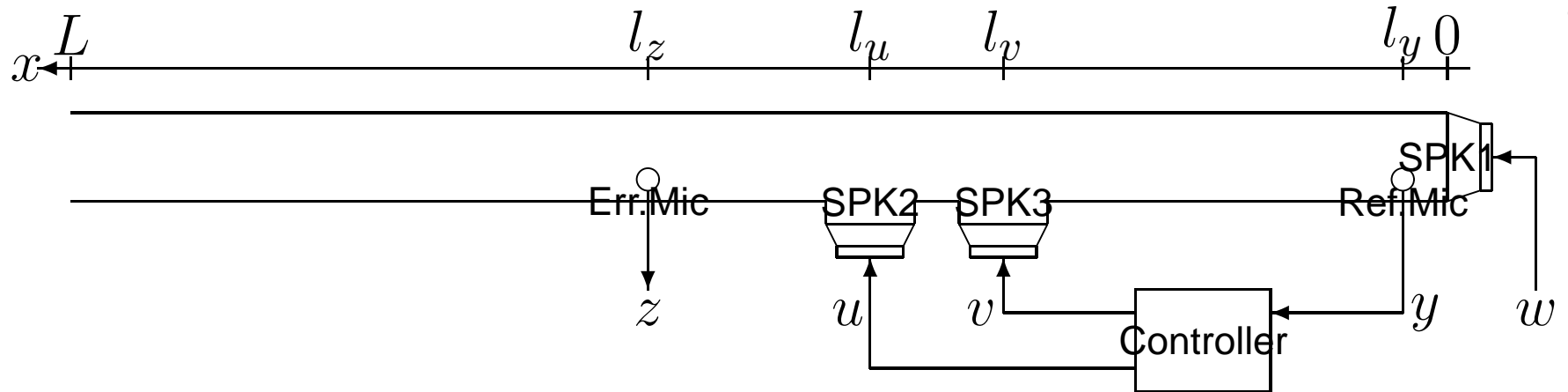
● 制御音源の駆動方式

● **Case(a)** 無指向性制御音源: $v(t) = 0$

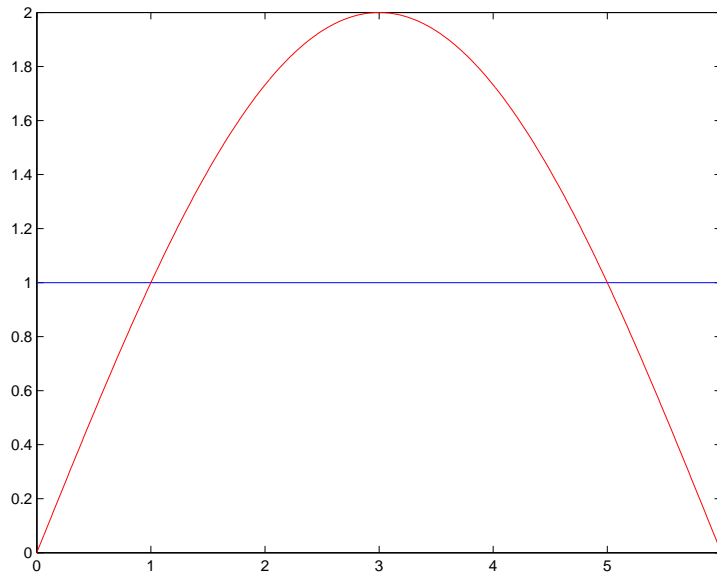
● **Case(b)** 指向性制御音源: $v(t) = -u(t - \tau)$, $\tau := \frac{l_\mu - l_\nu}{c_0}$,

c_0 : 音速

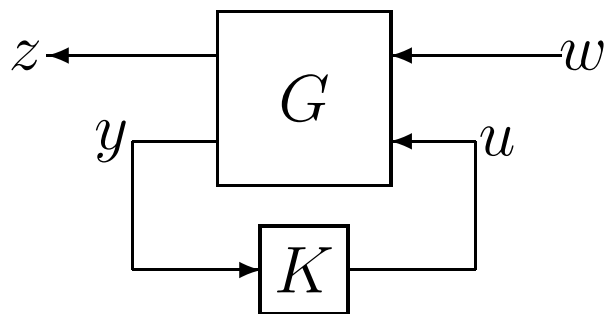
問題設定



- 制御帯域: $\Omega := [\omega_c, 5\omega_c]$, $\omega_c := \frac{\pi}{6T}$
... 指向性制御音源の周波数帯域 [Winkler& Elliott 1995]



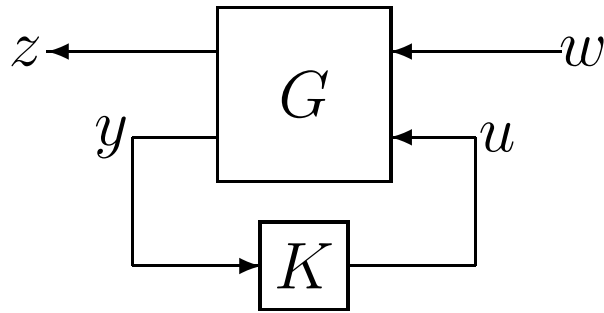
問題設定(つづき)



$$G(s) := \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix}$$

- 問題 1: 以下の条件下で γ を最大化する $K(s)$ を求めよ.

問題設定(つづき)



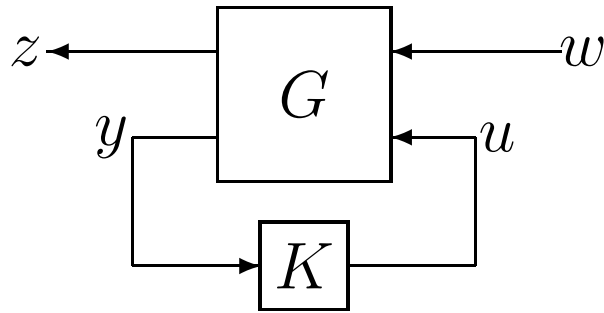
$$G(s) := \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix}$$

● 問題 1: 以下の条件下で γ を最大化する $K(s)$ を求めよ.

(i) 加法的摂動 $W\Delta(s)$ に対してロバスト安定.

$$\Delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty, |\Delta(j\omega)| = 0 (\omega \notin \Omega)$$

問題設定(つづき)



$$G(s) := \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix}$$

● 問題 1: 以下の条件下で γ を最大化する $K(s)$ を求めよ.

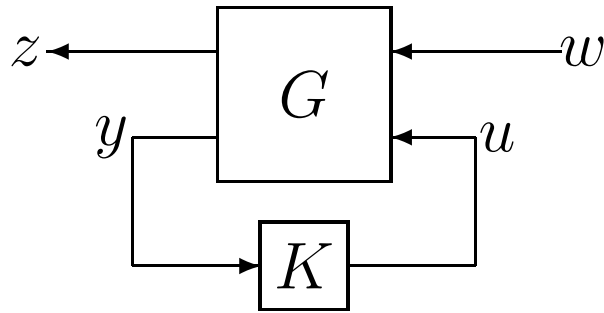
(i) 加法的摂動 $W\Delta(s)$ に対してロバスト安定.

$$\Delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty, |\Delta(j\omega)| = 0 (\omega \notin \Omega)$$

$$\frac{1}{W} > \left| \frac{K(j\omega)}{1 - G_{yu}(j\omega)K(j\omega)} \right| = \left| \frac{G_{zw}(j\omega) - H_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right| \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$H_{zw}(s) = G_{zw}(s) + \frac{G_{zu}(s)K(s)G_{yw}(s)}{1 - G_{yu}(s)K(s)}$$

問題設定(つづき)



$$G(s) := \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix}$$

● 問題 1: 以下の条件下で γ を最大化する $K(s)$ を求めよ.

(i) 加法的摂動 $W\Delta(s)$ に対してロバスト安定.

$$\Delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty, |\Delta(j\omega)| = 0 (\omega \notin \Omega)$$

$$\frac{1}{W} > \left| \frac{K(j\omega)}{1 - G_{yu}(j\omega)K(j\omega)} \right| = \left| \frac{G_{zw}(j\omega) - H_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right| \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$H_{zw}(s) = G_{zw}(s) + \frac{G_{zu}(s)K(s)G_{yw}(s)}{1 - G_{yu}(s)K(s)}$$

(ii) Ω におけるノミナル閉ループゲインが γ 以下

$$\gamma \geq |H_{zw}(j\omega)| \quad \forall \omega \in \Omega$$

プラントモデルの導出

- 位置 $x = x_s$ におかれた音源の体積速度から位置 x における音圧までの伝達関数

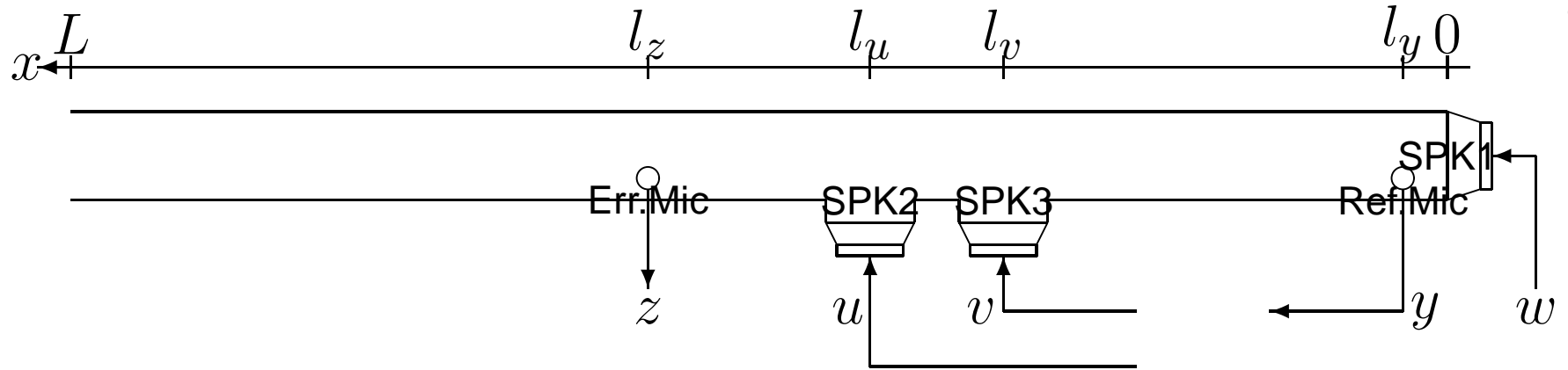
$$G(x, x_s)(s) := \begin{cases} G_{up}(x, x_s)(s) & (0 \leq x \leq x_s) \\ G_{down}(x, x_s)(s) & (x_s \leq x \leq L) \end{cases}$$

$$G_{up}(x, x_s)(s) := \frac{\rho_0 c_0}{2} \frac{\left(e^{-\hat{s} \frac{x_s}{c_0}} - e^{-\hat{s} \frac{2L-x_s}{c_0}} \right) \left(e^{-\hat{s} \frac{-x}{c_0}} + e^{-\hat{s} \frac{x}{c_0}} \right)}{1 + e^{-\hat{s} \frac{2L}{c_0}}}$$

$$G_{down}(x, x_s)(s) := \frac{\rho_0 c_0}{2} \frac{\left(e^{-\hat{s} \frac{x}{c_0}} - e^{-\hat{s} \frac{2L-x}{c_0}} \right) \left(e^{-\hat{s} \frac{-x_s}{c_0}} + e^{-\hat{s} \frac{x_s}{c_0}} \right)}{1 + e^{-\hat{s} \frac{2L}{c_0}}}$$

- $\hat{s} := s + \beta, \quad \beta > 0$
- $e^{-\hat{s}l} = e^{-sl} e^{-\beta l} \dots$ 減衰を伴ったむだ時間
- $G(x, x_s)(s)$: 因果的かつ安定

プラントモデルの導出(つづき)



- w, u, v から z, y までの伝達関数

$$G_{zw} = G_{down}(l_z, 0), \quad G_{zu} = G_{down}(l_z, l_u), \quad G_{zv} = G_{down}(l_z, l_v)$$

$$G_{yw} = G_{down}(l_y, 0), \quad G_{yu} = G_{up}(l_y, l_u), \quad G_{yv} = G_{up}(l_y, l_v)$$

- Case (b)

$$G_{zu}^b = G_{zu} - e^{-\hat{s}\tau} G_{zv}, \quad G_{yu}^b = G_{yu} - e^{-\hat{s}\tau} G_{yv}$$

主要結果

● 完全騒音除去

$$H_{zw}(s) = G_{zw}(s) + \frac{G_{zu}(s)K(s)G_{yw}(s)}{1 - G_{yu}(s)K(s)} = 0$$

$$K(s) = \frac{G_{zw}(s)}{G_{zw}(s)G_{yu}(s) - G_{zu}(s)G_{yw}(s)} =: K_*(s) \dots \text{仮想的補償器}$$

- 有限次元のプラントモデルに基づく能動騒音制御系の設計 [Hong& Bernstein 1998]
- センサ/アクチュエータの配置問題 [Toochinda et al 2001]

主要結果(つづき)

● 仮想的補償器

$$K_*^a(s) = -\frac{2}{\rho_0 c_0} \frac{e^{-\hat{s} \frac{l_u - l_y}{c_0}}}{1 - e^{-\hat{s} \frac{2(l_u - l_y)}{c_0}}}, \quad K_*^b(s) = -\frac{2}{\rho_0 c_0} \frac{e^{-\hat{s} \frac{l_u - l_y}{c_0}}}{1 - e^{-\hat{s} \frac{2(l_u - l_v)}{c_0}}}.$$

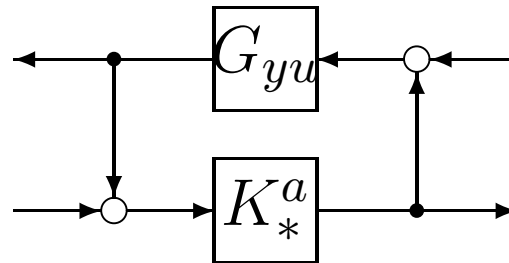
- 因果的 ... $l_u > l_v > l_y$
- 安定
- 安定化補償器

主要結果(つづき)

● 仮想的補償器

$$K_*^a(s) = -\frac{2}{\rho_0 c_0} \frac{e^{-\hat{s} \frac{l_u - l_y}{c_0}}}{1 - e^{-\hat{s} \frac{2(l_u - l_y)}{c_0}}}, \quad K_*^b(s) = -\frac{2}{\rho_0 c_0} \frac{e^{-\hat{s} \frac{l_u - l_y}{c_0}}}{1 - e^{-\hat{s} \frac{2(l_u - l_y)}{c_0}}}.$$

- 因果的 ... $l_u > l_v > l_y$
- 安定
- 安定化補償器



主要結果(つづき)

- 完全騒音除去におけるロバスト安定条件

$$\frac{1}{W} > \left| \frac{G_{zw}(j\omega) - H_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right| \forall \omega \in \Omega \Leftrightarrow \frac{1}{W} > \max_{\omega \in \Omega} \left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right|$$

主要結果(つづき)

- 完全騒音除去におけるロバスト安定条件

$$\frac{1}{W} > \left| \frac{G_{zw}(j\omega) - H_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right| \forall \omega \in \Omega \Leftrightarrow \frac{1}{W} > \max_{\omega \in \Omega} \left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right|$$

- [補題 2]

$$\frac{1 - e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{1 + e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}} \cdot \frac{1 - e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}}}{1 + e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}}} > \nu, \quad \nu := \frac{1 - e^{-\beta \frac{2l_u}{c_0}}}{\sqrt{1 - e^{-\beta \frac{2(l_u-l_v)}{c_0}} + e^{-\beta \frac{4(l_u-l_v)}{c_0}}}}$$

が成り立つとき、次式が成り立つ。

$$\max_{\omega \in \Omega} \left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}^a(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right| > \max_{\omega \in \Omega} \left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}^b(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right|$$

Case (b) の方が大きな W を許容する

主要結果(つづき)

$$\frac{1-e^{-\beta\frac{2L}{c_0}}}{1+e^{-\beta\frac{2L}{c_0}}} \cdot \frac{1-e^{-\beta\frac{2(L-l_y)}{c_0}}}{1+e^{-\beta\frac{2(L-l_y)}{c_0}}} > \nu, \quad \nu := \frac{1-e^{-\beta\frac{2l_u}{c_0}}}{\sqrt{1-e^{-\beta\frac{2(l_u-l_v)}{c_0}} + e^{-\beta\frac{4(l_u-l_v)}{c_0}}}}$$

- $\nu < 1$ の場合 ... 十分大きな L に対して成り立つ

主要結果(つづき)

$$\frac{1-e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{1+e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}} \cdot \frac{1-e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}}}{1+e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}}} > \nu, \quad \nu := \frac{1-e^{-\beta \frac{2l_u}{c_0}}}{\sqrt{1-e^{-\beta \frac{2(l_u-l_v)}{c_0}} + e^{-\beta \frac{4(l_u-l_v)}{c_0}}}}$$

- $\nu < 1$ の場合 ... 十分大きな L に対して成り立つ
- **[補題 3]** 次のいずれかの条件が成り立つならば $\nu < 1$ が成り立つ
 - $l_u < \frac{c_0}{2\beta} \log \frac{2}{2-\sqrt{3}}$
 - $l_v \leq \frac{c_0}{2\beta} \log 2$

主要結果(つづき)

$$\frac{1-e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{1+e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}} \cdot \frac{1-e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}}}{1+e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}}} > \nu, \quad \nu := \frac{1-e^{-\beta \frac{2l_u}{c_0}}}{\sqrt{1-e^{-\beta \frac{2(l_u-l_v)}{c_0}} + e^{-\beta \frac{4(l_u-l_v)}{c_0}}}}$$

- $\nu < 1$ の場合 ... 十分大きな L に対して成り立つ
- **[補題 3]** 次のいずれかの条件が成り立つならば $\nu < 1$ が成り立つ
 - (i) $l_u < \frac{c_0}{2\beta} \log \frac{2}{2-\sqrt{3}}$
 - (ii) $l_v \leq \frac{c_0}{2\beta} \log 2$

現実的な状況下で条件が成り立つ

補題2の証明

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0 c_0}{2e^{-\beta \frac{l_u - l_y}{c_0}}} \max_{\omega \in \Omega} \left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}^a(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right| = \max_{\omega \in \Omega} \frac{\left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2L}{c_0}} \right|}{\left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2l_u}{c_0}} \right| \cdot \left| 1 - e^{-\hat{s} \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right|} \\
 & \geq \frac{\max_{\omega \in \Omega} \frac{1 - e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{\left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2l_u}{c_0}} \right| \left(1 + e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)}}{\min_{\omega \in \Omega} \left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2l_u}{c_0}} \right| \left(1 + e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)} = \frac{1 - e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{\min_{\omega \in \Omega} \left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2l_u}{c_0}} \right| \left(1 + e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)} \\
 & = \frac{1 - e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{\left(1 - e^{-\beta \frac{2l_u}{c_0}} \right) \left(1 + e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)} \\
 & > \frac{1 + e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{\sqrt{1 - e^{-\beta \frac{2(l_u - l_v)}{c_0}} + e^{-\beta \frac{4(l_u - l_v)}{c_0}}} \left(1 - e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)} \\
 & \geq \frac{\max_{\omega \in \Omega} \frac{\left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2L}{c_0}} \right|}{\left| 1 - e^{-\hat{s} \frac{2(l_u - l_v)}{c_0}} \right| \cdot \left| 1 - e^{-\hat{s} \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right|}}{\frac{\rho_0 c_0}{2e^{-\beta \frac{l_u - l_y}{c_0}}} \max_{\omega \in \Omega} \left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}^b(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right|}
 \end{aligned}$$

補題2の証明

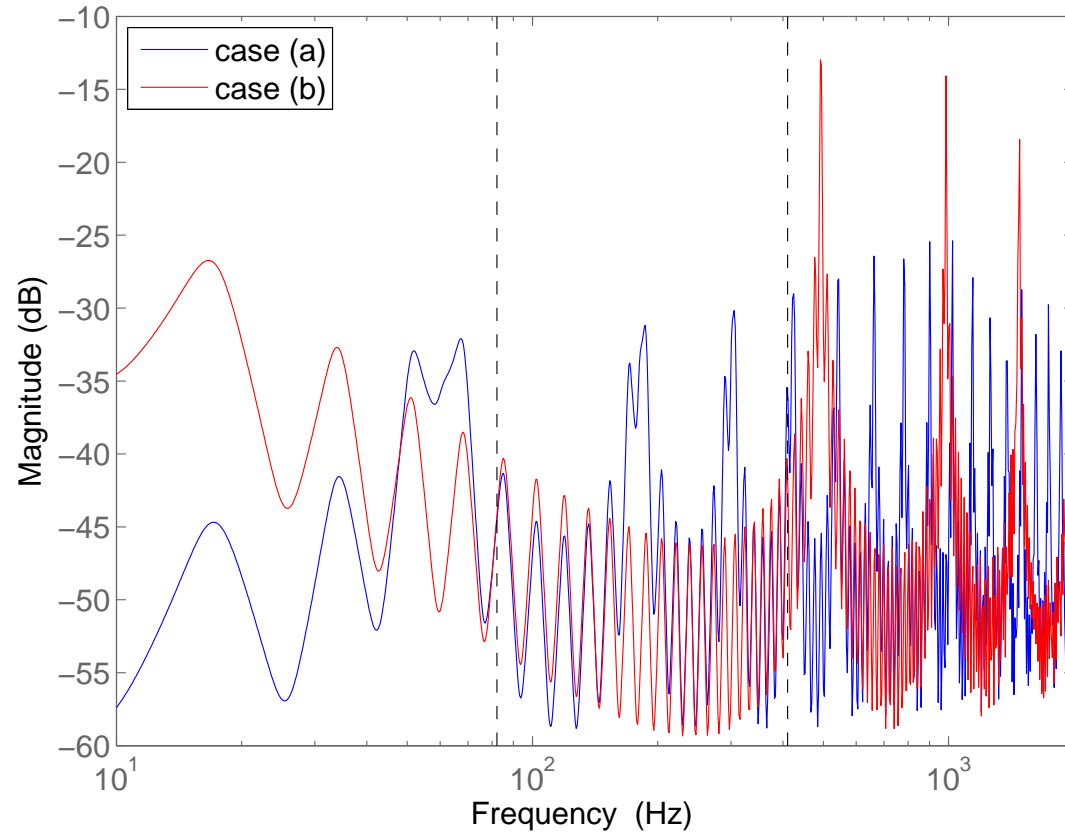
$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0 c_0}{2e^{-\beta \frac{l_u - l_y}{c_0}}} \max_{\omega \in \Omega} \left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}^a(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right| = \max_{\omega \in \Omega} \frac{\left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2L}{c_0}} \right|}{\left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2l_u}{c_0}} \right| \cdot \left| 1 - e^{-\hat{s} \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right|} \\
 & \geq \frac{\max_{\omega \in \Omega} \frac{1 - e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{\left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2l_u}{c_0}} \right| \left(1 + e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)}}{\min_{\omega \in \Omega} \left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2l_u}{c_0}} \right| \left(1 + e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)} = \frac{1 - e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{\left(1 - e^{-\beta \frac{2l_u}{c_0}} \right) \left(1 + e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)} \\
 & = \frac{1 + e^{-\beta \frac{2L}{c_0}}}{\sqrt{1 - e^{-\beta \frac{2(l_u - l_y)}{c_0}} + e^{-\beta \frac{4(l_u - l_y)}{c_0}}} \left(1 - e^{-\beta \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right)} \\
 & \geq \frac{\max_{\omega \in \Omega} \frac{\left| 1 + e^{-\hat{s} \frac{2L}{c_0}} \right|}{\left| 1 - e^{-\hat{s} \frac{2(l_u - l_y)}{c_0}} \right| \cdot \left| 1 - e^{-\hat{s} \frac{2(L-l_y)}{c_0}} \right|}}{\frac{\rho_0 c_0}{2e^{-\beta \frac{l_u - l_y}{c_0}}} \max_{\omega \in \Omega} \left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}^b(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right|}
 \end{aligned}$$

数值例

$$L = 10, l_w = 0, l_y = 0.03, l_v = 1.07, l_u = 1.415, l_z = 1.865$$

(左辺) = 0.4998 > $\nu = 0.2274$

$$\left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right|$$

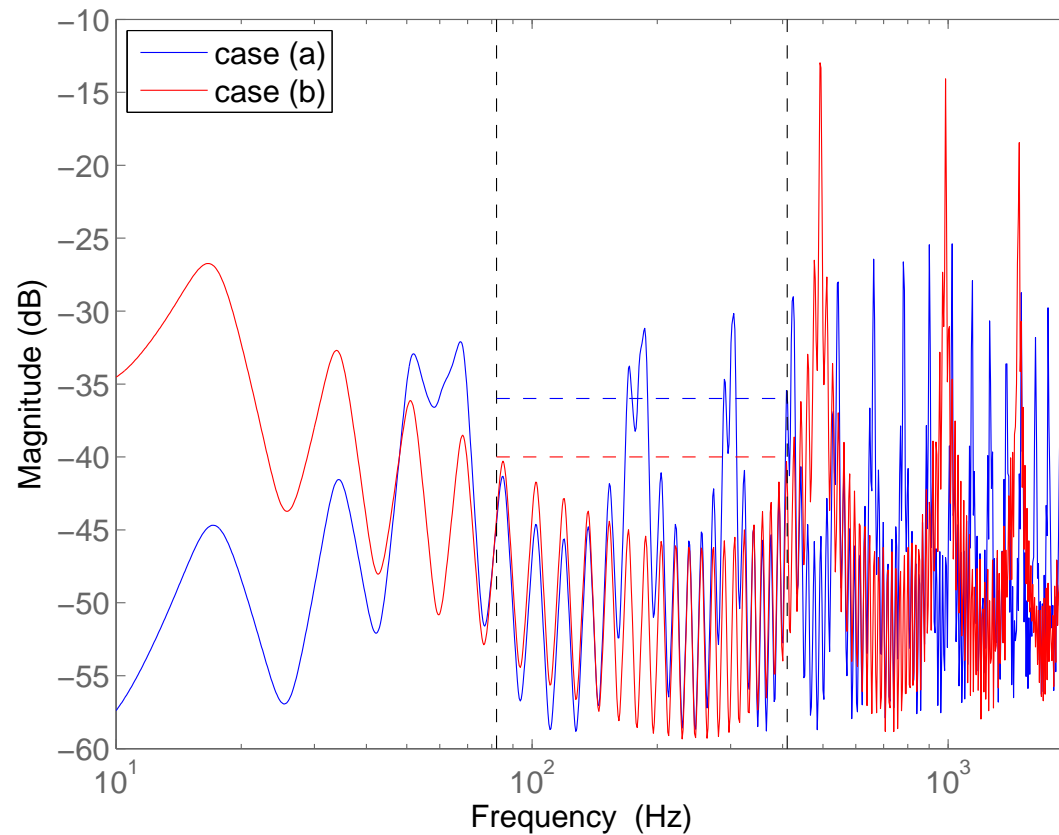


数值例

$$L = 10, l_w = 0, l_y = 0.03, l_v = 1.07, l_u = 1.415, l_z = 1.865$$

(左辺) = 0.4998 > $\nu = 0.2274$

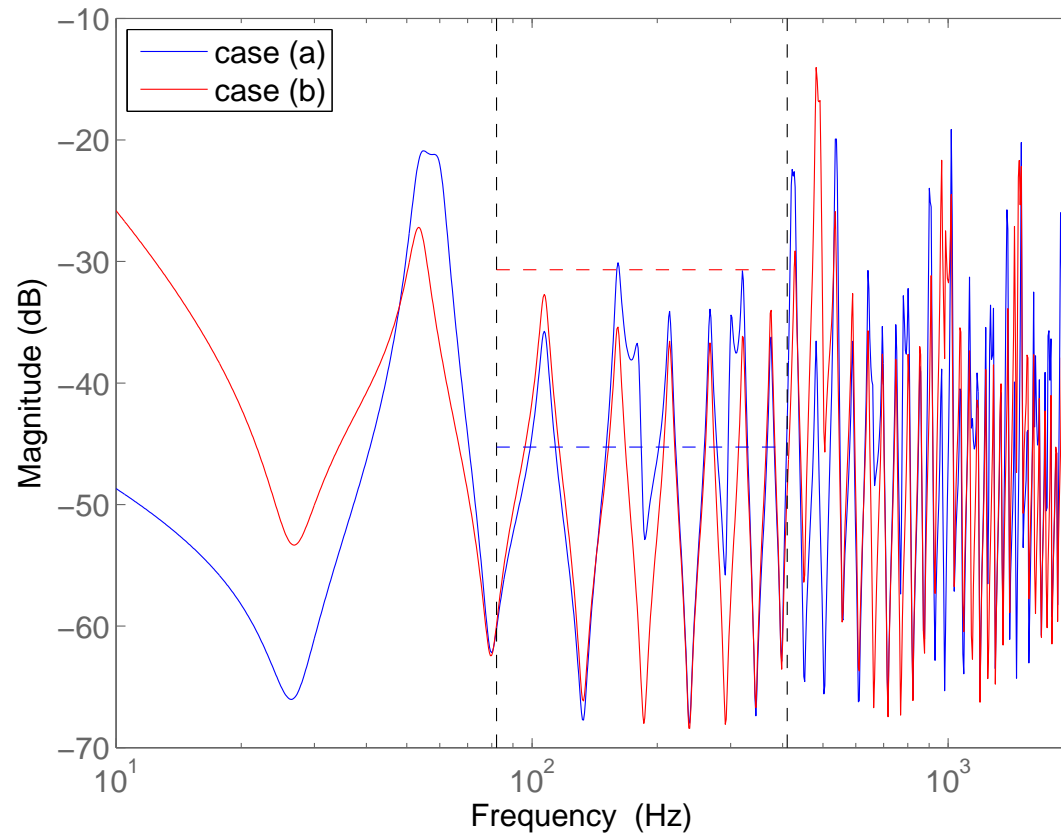
$$\left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right|$$



数値例(つづき)

$L = 3.205$, $l_w = 0$, $l_y = 0.03$, $l_v = 1.07$, $l_u = 1.415$, $l_z = 1.865$
(左辺) = 0.0752 ! $\nu = 0.2274$

$$\left| \frac{G_{zw}(j\omega)}{G_{zu}(j\omega)G_{yw}(j\omega)} \right|$$



まとめ

- 完全騒音除去におけるロバスト安定性解析
 - 指向性制御音源の方が大きな安定余裕を許容する条件
 - 現実的な状況で成り立つ
 - 十分長いダクト
 - 音源をダクトの上流に配置

まとめ

- 完全騒音除去におけるロバスト安定性解析
 - 指向性制御音源の方が大きな安定余裕を許容する条件
 - 現実的な状況で成り立つ
 - 十分長いダクト
 - 音源をダクトの上流に配置
- 今後の課題 ... $H_{zw}(s) \neq 0$ の場合