$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=e^{At}$　の証明

平成 22 年 5 月 10 日

$$(sI-A)^{-1}=\mathcal{L}\left[e^{At}\right]$$

を示せばよい。これはさらに、

$$I=(sI-A)\mathcal{L}\left[e^{At}\right]$$

と等価であるので、これを示す。e^{At}　の定義より、

$$\begin{aligned}
\text{上式右辺} &= (sI-A)\mathcal{L}\left[I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots\right] \\
&= (sI-A)\left(\frac{1}{s}I+\frac{1}{s^2}A+\frac{1}{s^3}A^2+\frac{1}{s^4}A^3+\cdots\right) \\
&= \left(I+\frac{1}{s}A+\frac{1}{s^2}A^2+\frac{1}{s^3}A^3+\cdots\right)-\left(\frac{1}{s}A+\frac{1}{s^2}A^2+\frac{1}{s^3}A^3+\frac{1}{s^4}A^4+\cdots\right) \\
&= I.
\end{aligned}$$