(A,B)が可制御$\Rightarrow$ (A,B) は可制御正準形に相似変換可能

平成 22 年 5 月 23 日

補題 1 与えられた行列 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ と $B \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ に対して、(A,B) が可制御ならば、適当な正則行列 $T \in \mathbf{R}^{n\times n}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$T^{-1}AT = \tilde{A} \tag{1}$$

$$T^{-1}B = \tilde{B} \tag{2}$$

ただし、

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

で、特性多項式が

$$|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 := \phi(s) \tag{4}$$

と表されるとする。

証明 1 *(文献 [1] p.177参照)*
　仮定より、可制御性行列 U_C

$$U_C := \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{5}$$

は正則である。特性多項式の係数を用いて、

$$M := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & & \iddots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_3 & & \iddots & \iddots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \iddots & & & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

と定義する。M が正則行列であることは容易にわかる。さらに、

$$T := U_C M \tag{7}$$

とおくと、T も正則行列となる。行列 T の列ベクトルを v_i と表す。すなわち

$$T =: \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-2} & v_{n-1} & v_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

とおく。*(7)* 式を列毎に評価すると、まず第 n 列と第 *n-1* 列の関係式

$$v_n = B, \quad v_{n-1} = a_{n-1}B + AB \tag{9}$$

より、

$$Av_n = v_{n-1} - a_{n-1}v_n \tag{10}$$

が成り立つ。次に第 *n-1* 列と第 *n-2* 列の関係式

$$v_{n-1} = a_{n-1}B + AB, \quad v_{n-2} = a_{n-2}B + a_{n-1}AB + A^2B \tag{11}$$

より、

$$Av_{n-1} = v_{n-2} - a_{n-2}v_n \tag{12}$$

が成り立つ。これを同様に繰り返すと、

$$Av_i = v_{i-1} - a_{i-1}v_n \quad (i = n, n-1, n-2, \cdots, 3, 2) \tag{13}$$

が成り立つ。

上式は $i = 1$ の場合を含まない。この場合について、以下、特別に考える。*(7)* 式に左から A をかけ、第 1 列の関係式をとりだすと、

$$\begin{aligned} Av_1 &= a_1AB + a_2A^2B + a_3A^3B + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}B + A^nB & (14)\\ &= (a_1A + a_2A^2 + a_3A^3 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n)B & (15)\\ &= (-a_0I)B & (16)\\ &= -a_0v_n & (17) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、ケーリー・ハミルトンの定理 *(*文献 *[1] p.168* 参照*)* より、

$$\phi(A) := A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots a_1A + a_0I = 0 \tag{18}$$

すなわち

$$a_1A + a_2A^2 + a_3A^3 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = -a_0I \tag{19}$$

が成り立つことを用いた。

(13) 式、*(17)* 式をまとめて行列表現すると、次式を得る。

$$A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{20}$$

すなわち、

$$AT = T\tilde{A} \tag{21}$$

が成り立つ。よって、*(1)* 式が成り立つ。

一方、次式が成り立つことは容易に確かめられる。

$$T\tilde{B} = B \tag{22}$$

よって、*(2)* 式が成り立つ。*(*証明終わり*)*

上記より、(A, B) を可制御正準形に変換する正則行列 T は (7) 式で与えられる。一方、テキストでは、T^{-1} が p.67 (5.10) 式で与えられているが、これらは同一の行列であることが示せる。

参考文献

[1] 児玉 慎三, 須田 信英: システム制御のためのマトリクス理論; 計測自動制御学会 (1981)