

可制御正準系による極配置とアッカーマン法との関連

「現代制御基礎」担当 小林

平成 23 年 5 月 30 日

補題 1 (可制御正準系による極配置) 与えられた行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ と $B \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ に対して、 (A, B) が可制御であるとする。また、目的の特性多項式を

$$\phi_d(s) := s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_2s^2 + d_1s + d_0 \quad (1)$$

とおく。このとき、適当な行列 $F \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ が存在して、行列 $A - BF$ の固有値が特性方程式 $\phi_d(s) = 0$ の根に一致する。

そのような行列 F は、以下のように与えられる。

$$F = \tilde{F}T^{-1} \quad (2)$$

$$\tilde{F} = [d_0 - a_0 \quad d_1 - a_1 \quad d_2 - a_2 \quad \cdots \quad d_{n-1} - a_{n-1}] \quad (3)$$

ここで、 a_i は、行列 A に関する特性多項式

$$|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0 := \phi(s) \quad (4)$$

の係数である。また、行列 T は以下のように与えられる正則行列である。

$$T := U_C M \quad (5)$$

$$U_C := [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \text{ (可制御性行列)} \quad (6)$$

$$M := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & & \cdots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_3 & & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & & & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

注意 1 教科書「演習で学ぶ現代制御理論」では、行列 T の代わりに T^{-1} が次のように与えられている (p.67, (5.10) 式、逆行列をとれば、上記 $U_C M$ に一致する)

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} e_n \\ e_n A \\ e_n A^2 \\ \vdots \\ e_n A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad e_n := [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] U_C^{-1} \quad (8)$$

補題 2 (アッカーマン法による極配置) 与えられた行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ と $B \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ に対して、 (A, B) が可制御であるとする。また、目的の特性多項式を

$$\phi_{cl}(s) := s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_2s^2 + d_1s + d_0 \quad (9)$$

とおく。このとき、適当な行列 $F \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ が存在して、行列 $A - BF$ の固有値が特性方程式 $\phi_{cl}(s) = 0$ の根に一致する。

そのような行列 F は、以下のように与えられる。

$$F = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] U_C^{-1} (A^n + d_{n-1}A^{n-1} + \cdots + d_2A^2 + d_1A + d_0I) \quad (10)$$

補題 3 (2)、(10) 式の F は等しい。

証明 1 (10) 式の F を F_{Ac} とおく。 $F_{Ac} = F$ が成り立つことを示すために、 $F_{Ac}T = FT$ 、すなわち、

$$F_{Ac}T = \tilde{F} := [\tilde{f}_1 \ \tilde{f}_2 \ \cdots \ \tilde{f}_n] \quad (11)$$

が成り立つことを示す。

まず (10) 式より、

$$F_{Ac}T = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] U_C^{-1} T T^{-1} (A^n + d_{n-1}A^{n-1} + \cdots + d_2A^2 + d_1A + d_0I) T \quad (12)$$

$$= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] M (\tilde{A}^n + d_{n-1}\tilde{A}^{n-1} + \cdots + d_2\tilde{A}^2 + d_1\tilde{A} + d_0I) \quad (13)$$

が成り立つ。ただし (5) 式より $U_C^{-1}T = M$ が成り立つことと、 $T^{-1}AT = \tilde{A}$ (\tilde{A} は可制御正準系の A 行列、前回示した pdf ファイルを参照) の関係を用いた。

ここで、

$$[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] M = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (14)$$

が成り立つことと、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$\tilde{A}^n + a_{n-1}\tilde{A}^{n-1} + a_{n-2}\tilde{A}^{n-2} + \cdots + a_1\tilde{A} + a_0I = 0 \quad (15)$$

が成り立つことを用いると、

$$\begin{aligned} F_{Ac}T &= [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] ((d_{n-1} - a_{n-1})\tilde{A}^{n-1} + \cdots + (d_2 - a_2)\tilde{A}^2 + (d_1 - a_1)\tilde{A} + (d_0 - a_0)I) \\ &= [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] (\tilde{f}_n\tilde{A}^{n-1} + \cdots + \tilde{f}_3\tilde{A}^2 + \tilde{f}_2\tilde{A} + \tilde{f}_1I) \end{aligned} \quad (16)$$

が成り立つ。さらに、

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] I = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (17)$$

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \tilde{A} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (18)$$

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \tilde{A}^2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (19)$$

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \tilde{A}^3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \cdots \ 0] \quad (20)$$

$$\vdots \quad (21)$$

の関係が成り立つことから、

$$F_{Ac}T = [\tilde{f}_1 \ \tilde{f}_2 \ \cdots \ \tilde{f}_n] = \tilde{F} \quad (22)$$

すなわち、(11) 式が成り立つ。