

# 最適レギュレータ

## 閉ループ系が安定化で、評価関数 $J$ が最小となる

「現代制御基礎」担当 小林

平成 23 年 6 月 27 日

補題 1 (6.1) 式のシステムに対して (6.5) 式の解  $P > 0$  を用いて (6.4) 式の状態フィードバックを施したとき、以下が成り立つ:

(i) 閉ループ系は安定である。

(ii) (6.3) 式の  $J$  は、最小値  $J_{\min} = \frac{1}{2}x^T(0)Px(0)$  をとる。

証明 1 (i) : 仮定より次式が成り立つ ((6.9) 式)。

$$(A - BF)^T P + P(A - BF) = -Q - F^T R F \quad (1)$$

ただし、 $F = R^{-1}B^T P$ 。ここで、上式右辺が負定であることから、次式が成り立つ。

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} < 0 \quad (2)$$

ただし、 $A_{cl} := A - BF$  とおいた。よって、補題 2 の (ii)  $\Rightarrow$  (i) より、閉ループ系  $\dot{x} = A_{cl}x$  は安定となる ( p.97 演習 6.9 の上の文章を参照 )

(ii) の証明:

$$2J = \int_0^{\infty} \{x^T Q x + u^T R u\} dt \quad (3)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[ x^T \left\{ -\underline{A^T P} - \underline{PA} + \underline{PBR^{-1}B^T P} \right\} x + \underline{u^T R u} - \underline{u^T B^T P x} - \underline{x^T P B u} + \underline{u^T B^T P x} + \underline{x^T P B u} \right] dt \quad (4)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[ -\left\{ \underline{x^T A^T} + \underline{u^T B^T} \right\} \underline{P x} - \underline{x^T P \{A x + B u\}} + \left\{ \underline{x^T P B R^{-1}} + \underline{u^T} \right\} \underline{R \{R^{-1} B^T P x + u\}} \right] dt \quad (5)$$

$$= -\int_0^{\infty} \underline{\dot{x}^T P x} dt - \int_0^{\infty} \underline{x^T P \dot{x}} dt + \int_0^{\infty} \left\{ \underline{x^T P B R^{-1}} + \underline{u^T} \right\} \underline{R \{R^{-1} B^T P x + u\}} dt \quad (6)$$

$$= -[x^T P x]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x^T P \dot{x} dt - \int_0^{\infty} \underline{x^T P \dot{x}} dt + \int_0^{\infty} \left\{ \underline{x^T P B R^{-1}} + \underline{u^T} \right\} \underline{R \{R^{-1} B^T P x + u\}} dt \quad (7)$$

$$= x(0)^T P x(0) + \int_0^{\infty} \left\{ \underline{x^T P B R^{-1}} + \underline{u^T} \right\} \underline{R \{R^{-1} B^T P x + u\}} dt \quad (8)$$

最後の式の第一項は  $u$  に無関係である。よって、 $u = -R^{-1}B^T P x$  すなわち (6.4) 式が成り立つとき、 $J$  は最小値  $\frac{1}{2}x(0)^T P x(0)$  をとる。

補題 2  $A$  は与えられた実正方行列であるとする。このとき、次の条件は等価である。

(i)  $A$  は安定。すなわち、次式が成り立つ。

$$\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_i(A) < 0 \quad \forall i \quad (9)$$

ただし、 $\lambda_i(A)$  は  $A$  の固有値である。

(ii) 正定行列  $P$  が存在し、次式が成り立つ。

$$PA + A^T P < 0 \quad (10)$$

証明 2 (ii)  $\Rightarrow$  (i) :  $A$  の任意の固有値を  $\lambda$  , 対応する固有ベクトルを  $v$  とおくと、定義より  $v \neq 0$  で、 $Av = \lambda v$  が成り立つ。よって、次式が成り立つ。

$$v^*(PA + A^T P)v = \lambda v^* P v + \bar{\lambda} v^* P v = (\lambda + \bar{\lambda}) v^* P v < 0. \quad (11)$$

ここで、仮定より  $P$  が正定行列であることから、任意の非零の複素ベクトル  $v$  に対して  $v^* P v > 0$  が成り立つ。よって、 $\lambda + \bar{\lambda} < 0$  でなければならない。すなわち (i) が成り立つ。

(i)  $\Rightarrow$  (ii) の証明: (略)