最適レギュレータ ⇒
閉ループ系が安定で、評価関数 J が最小となる

「動的システムの解析と制御 (現代制御基礎)」担当 小林

平成 24 年 12 月 7 日

補題 1 *(6.1)* 式のシステムに対して *(6.5)* 式の解 $P > 0$ を用いて *(6.4)* 式の状態フィードバックを施したとき、以下が成り立つ*:*

(i) 閉ループ系は安定である。

(ii) *(6.3)* 式の J は、最小値 $J_{\min} = \frac{1}{2}x^T(0)Px(0)$ をとる。

証明 1 *(i) :* 仮定より次式が成り立つ *((6.9)* 式*)*。

$$(A - BF)^T P + P(A - BF) = -Q - F^T RF \tag{1}$$

ただし、$F = R^{-1}B^T P$。ここで、上式右辺が負定であることから、次式が成り立つ。

$$A_{cl}^T P + PA_{cl} < 0 \tag{2}$$

ただし、$A_{cl} := A - BF$ とおいた。よって、次ページの補題 *2* の *(ii)* ⇒ *(i)* より、閉ループ系 $\dot{x} = A_{cl}x$ は安定となる（*p.97* 演習 *6.9* の上の文章を参照)。
(ii) の証明*:*

$$\begin{aligned}
2J &= \int_0^\infty \left\{x^T Qx + u^T Ru\right\} dt && (3)\\
&= \int_0^\infty \left[x^T \left\{-A^TP - PA + PBR^{-1}B^TP\right\} x + u^TRu - u^TB^TPx - x^TPBu + u^TB^TPx + x^TPBu\right] dt && (4)\\
&\quad \text{… 最後の 4 つの項は、足して、引いた (合わせると 0)。}\\
&= \int_0^\infty \left[-\left\{x^TA^T + u^TB^T\right\} Px - x^TP\left\{Ax + Bu\right\} + \left\{x^TPBR^{-1} + u^T\right\} R\left\{R^{-1}B^TPx + u\right\}\right] dt && (5)\\
&\quad \text{… それぞれの色毎に項をまとめた。}\\
&= -\int_0^\infty \dot{x}^TPx dt - \int_0^\infty x^TP\dot{x} dt + \int_0^\infty \left\{x^TPBR^{-1} + u^T\right\} R\left\{R^{-1}B^TPx + u\right\} dt && (6)\\
&\quad \text{… } \dot{x} = Ax + Bu \text{ より。}\\
&= -\left[x^TPx\right]_0^\infty + \int_0^\infty x^TP\dot{x} dt - \int_0^\infty x^TP\dot{x} dt + \int_0^\infty \left\{x^TPBR^{-1} + u^T\right\} R\left\{R^{-1}B^TPx + u\right\} dt && (7)\\
&\quad \text{… 第 1 項を部分積分した。}\\
&= x(0)^TPx(0) + \int_0^\infty \left\{x^TPBR^{-1} + u^T\right\} R\left\{R^{-1}B^TPx + u\right\} dt && (8)\\
&\quad \text{… 第 2 項と 3 項は相殺する。第 1 項は、} x(\infty) = 0 \text{ より。}
\end{aligned}$$

最後の式の第一項は u に無関係である。よって、$u = -R^{-1}B^TPx$ すなわち *(6.4)* 式が成り立つとき、J は最小値 $\frac{1}{2}x(0)^TPx(0)$ をとる。

補題 2 A は与えられた実正方行列であるとする．このとき，次の条件は等価である．

(i) A は安定．すなわち，次式が成り立つ．

$$\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_i(A) < 0 \quad {}^{\forall} i \tag{9}$$

ただし，$\lambda_i(A)$ は A の固有値である．

(ii) 正定行列 P が存在し，次式が成り立つ．

$$PA + A^T P < 0 \tag{10}$$

証明 2 *(ii)⇒(i) :* A の任意の固有値を λ，対応する固有ベクトルを v とおくと，定義より $v \neq 0$ で，$Av = \lambda v$ が成り立つ．よって，次式が成り立つ．

$$v^*(PA + A^T P)v = \lambda v^* Pv + \bar{\lambda} v^* Pv = (\lambda + \bar{\lambda}) v^* Pv < 0. \tag{11}$$

ここで、仮定より P が正定行列であることから、任意の非零の複素ベクトル v に対して $v^* Pv > 0$ が成り立つ。よって、$\lambda + \bar{\lambda} < 0$ でなければならない．すなわち *(i)* が成り立つ。
(i)⇒(ii) の証明:（略）