

動的システムの解析と制御レポート#11(2020.11.27出題)

学籍番号: _____

氏名: 解答例

提出切: 12月2日(水)17:00(厳守)、提出先: [ilias] または [機械建設1号棟405室(小林居室)のドアポスト(過去のレポート原本もあれば一緒に提出)] 注意: この用紙に直接記入すること(別紙に記入しないこと)

課題6 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r = 9$ とする。このとき、次のシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

に対して、 $u = -Fx$ なる状態フィードバックを施し、評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + ru^2(t)\} dt \quad (1)$$

を最小化したい。すなわち、そのような F を求めたい。

最適制御問題の結果から、このような F は、リカッチ代数方程式

$$A^T P + PA + Q - PBr^{-1}B^T P = 0 \quad (2)$$

の正定解 $P > 0$ を用いて、

$$F = r^{-1}B^T P \quad (3)$$

と与えられる。

以下の(1)~(3)の間に答えよ。

(1) $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$ とおく。リカッチ方程式の解 P を求めよ。ただし、 $p_2 = 3$ である。(3点)

(2) (1)の解 P が正定であることを示せ。(1点)

(3) F を求め、そのときの閉ループ系が安定であることを示せ。(2点)

(1) $PA = \begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_2 \\ 0 & p_2 - p_3 \end{bmatrix}$, $PB = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$, $((2)式を代入) = \begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_2 \\ p_1 - p_2 & 2(p_2 - p_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_2 p_3 & p_3^2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{9}p_2^2 & p_1 - p_2 - \frac{1}{9}p_2 p_3 \\ * & 2(p_2 - p_3) + 1 - \frac{1}{9}p_3^2 \end{bmatrix} = 0$. $(2,2)より 6 - 2p_3 + 1 - \frac{1}{9}p_3^2 = 0$.
 $p_3^2 + 18p_3 - 63 = 0$, $p_3 = 3, -21$.
 $(p_3 + 21)(p_3 - 3) = 0$, $p_3 = 3 > 0$ (選定)

$\hookrightarrow (1,2)より p_1 - 3 - \frac{3}{9} \cdot 3 = 0$, $p_1 - 4 = 0$, $p_1 = 4$. $\therefore P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ //

(2) $|\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -3 \\ -3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 3) - 9 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 9 = \lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$.
 $\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 12}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2} > 0$. $\therefore P > 0$ //

(3) $F = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ //

$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (0.5)

$|\lambda I - (A - BF)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{1}{3} & \lambda + \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0$. $3\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$. $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3} = \frac{-2 \pm 1}{3}$
 $= \frac{-1}{3}, -1$

$A - BF$ の固有値の虚部が負なので安定