

動的システムの解析と制御レポート #11 (2021.12.3 出題)

学籍番号: _____

氏名: 解答例

提出/切: 12月8日(水)17:00 (厳守)、提出先: [ilias] または [機械建設 1号棟 405室 (小林居室) のドアポスト (過去のレポート原本もあれば一緒に提出)] 注意: この用紙に直接記入すること (別紙に記入しないこと)

課題 6 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $r = 1$ とする。このとき、次のシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

に対して、 $u = -Fx$ なる状態フィードバックを施し、評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + ru^2(t)\} dt \quad (1)$$

を最小化したい。すなわち、そのような F を求めたい。

最適制御問題の結果から、このような F は、リカッチ代数方程式

$$A^T P + PA + Q - PBr^{-1}B^T P = 0 \quad (2)$$

の正定解 $P > 0$ を用いて、

$$F = r^{-1}B^T P \quad (3)$$

と与えられる。

以下の (1)~(3) の間に答えよ。

(1) $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$ とおく。リカッチ方程式の解 P を求めよ。ただし、 $p_2 = 3$ である。(3点)

(2) (1) の解 P が正定であることを示せ。(1点)

(3) F を求め、そのときの閉ループ系が安定となることを示せ。(2点)

$$(1) PA = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_2 \\ 0 & p_2 - p_3 \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{式左辺} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_2 \\ * & 2(p_2 - p_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - p_2^2 & p_1 - p_2 - p_2 p_3 \\ * & 2p_2 - 2p_3 + 9 - p_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

~~(1,1) 成分 $p_2 = \pm 3$~~

(2,2) 成分 $6 - 2p_3 + 9 - p_3^2 = 0, \quad p_3^2 + 2p_3 - 15 = 0. \quad p_3 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 90}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2} = 3, -5$

(1,2) 成分 $p_1 - 3 - 9 = 0, \quad p_1 = 12$

$\therefore P = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

p_2 が正定成分に正しく $p_2 = 3$ と選ぶ。

(2) $|\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda - 12 & -3 \\ -3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 12)(\lambda - 3) - 9 = \lambda^2 - 15\lambda + 36 - 9 = \lambda^2 - 15\lambda + 27 = 0$
 $\lambda = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 108}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{3^2 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot 12}}{2} = \frac{15 \pm 3\sqrt{25 - 12}}{2}$
 $= \frac{15 \pm 3\sqrt{13}}{2} > 0. \quad \therefore P > 0.$

(3) $F = [p_2 \ p_3] = [3 \ 3]$, $A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

$|\lambda I - (A - BF)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \quad \therefore \lambda = -1, -3$
 $A - BF$ の固有値の実部が 全2員以下に安定