動的システムの解析と制御レポート#8(2020.11.6出題)

学籍番号:　　　　　　　　　　　　　氏名: 解答例

提出〆切:11月11日(水)17:00（厳守）、提出先: **[ilias] または [機械建設1号棟405室（小林居室）のドアポスト (過去のレポート原本もあれば一緒に提出)] 注意：この用紙に直接記入すること（別紙に記入しないこと）**

課題 3 次のシステムに対して、以下の(1)〜(3)の問に答えよ。

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値の一つは -2 である。残りの二つを求めよ。(2点)

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6 - \lambda = 0$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$$

$$\begin{array}{r} \lambda^2 - 2\lambda + 3 \\ \lambda+2 \overline{) \lambda^3 \quad -\lambda + 6} \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 \\ \hline -2\lambda^2 - \lambda \\ -2\lambda^2 - 4\lambda \\ \hline 3\lambda + 6 \\ 3\lambda + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ の解は $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-3}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}j$

∴ 残りの二つは $1+\sqrt{2}j$ と $1-\sqrt{2}j$ //

(2) $u = 0$ としたシステムが安定かどうか判定せよ。(2点)

Aの固有値に実部が非負のもの($1 \pm \sqrt{2}j$)が含まれるので不安定 //

(3) 行列 A の固有ベクトルとして以下の v_1, v_2, v_3 を選ぶことができる。それぞれに対応する固有値を答えよ。(2点)

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2}j \\ -1+2\sqrt{2}j \end{bmatrix}, \quad v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2}j \\ -1-2\sqrt{2}j \end{bmatrix}$$

$(\lambda_i I - A) v_i = 0$

・$\lambda = -2$ のとき

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

1とおくと

第一行より $-2 - b = 0$, $b = -2$.

第二行より $-2b - c = 0$, $c = 4$.

$$\therefore v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = v_1.$$

・$\lambda = 1+\sqrt{2}j$ のとき

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2}j & -1 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2}j & -1 \\ 6 & -1 & 1+\sqrt{2}j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

1とおくと

第一行より $1+\sqrt{2}j - b = 0$, $b = 1+\sqrt{2}j$

第二行より $(1+\sqrt{2}j)b - c = 0$

$c = (1+\sqrt{2}j)^2 = 1 + 2\sqrt{2}j - 2$
$= -1 + 2\sqrt{2}j$

$$\therefore v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2}j \\ -1+2\sqrt{2}j \end{bmatrix} = v_2.$$

・$\lambda = 1-\sqrt{2}j$ のとき

$v = v_3$ (残り).

∴ v_1, v_2, v_3 に対応する固有値はそれぞれ -2, $1+\sqrt{2}j$, $1-\sqrt{2}j$ である //