第 5 章 : 周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード : 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

5.2 ベクトル軌跡

キーワード : ベクトル軌跡

学習目標 : 動的システムの周波数応答特性を理解する。
ベクトル軌跡による表示ができるようにする。

1

第 5 章 : 周波数応答

5.3 ボード線図

キーワード : ボード線図, ゲイン曲線, 位相曲線

5.4 ボード線図の性質

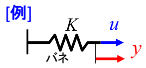
キーワード : ボード線図の利点

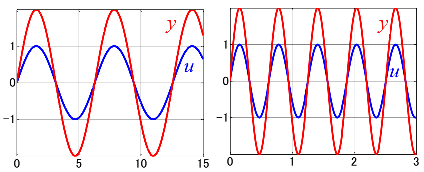
学習目標 : ボード線図を用いて周波数特性を図式的に
表すことができるようにする。折れ線近似に
より、高次系のボード線図が描けるようにする。

2

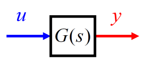
静的システム

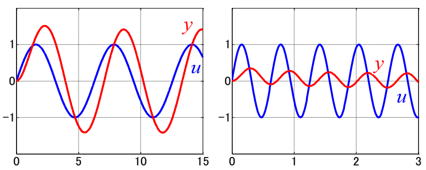
[例]





動的システム





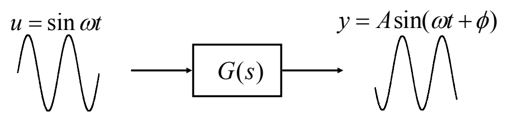
入力 $\sin \omega t$ の周波数 ω に応じて振幅と位相が変化する

3

5.1 周波数応答と伝達関数

線形システム（安定な LTI システム）

（一定周波数の）正弦波を入力として加え
続けると, 定常状態ではその出力も入力と
同じ周波数の正弦波になる.



振幅の変化 $A = |G(j\omega)|$ ゲイン

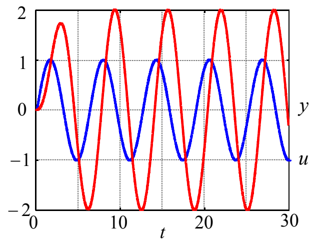
位相の差 $\phi = \angle G(j\omega)$ 位相（位相差）

4

[例] $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + s + 1}$ $\quad u(t) = \sin t$

入力と出力は同じ周波数, 異なるのは振幅と位相だけ

（静的システム : 振幅だけ, 動的システム : 振幅と位相）



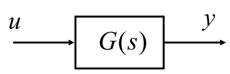


図 5.2 正弦波入力に対する応答例

5

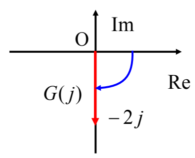
[例] $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + s + 1}$ $\quad u(t) = \sin t \quad (\omega = 1)$

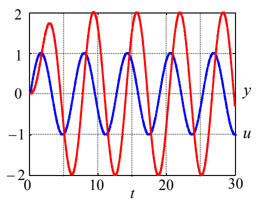
ゲイン

$$|G(j)| = \left|\frac{2}{j^2 + j + 1}\right| = \left|\frac{2}{j}\right| = \frac{|2|}{|j|} = \frac{2}{1} = 2$$

位相

$$\angle G(j) = \angle \frac{2}{j} = \angle 2 - \angle j = 0^\circ - 90^\circ = -90^\circ$$





複素平面上のベクトル $G(j)$

6

[例] $G(s)=\dfrac{2}{s^2+s+1}$ $u(t)=\sin 1.62t \quad (\omega=1.62)$

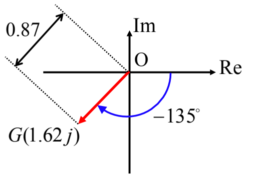
ゲイン

$$|G(1.62j)|=\left|\frac{2}{1.62^2 j^2+1.62j+1}\right|=\frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{(1-1.62^2)^2+(1.62)^2}}\cong 0.87$$

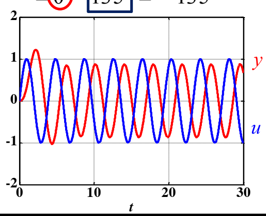
位相

$$\angle G(1.62j)=\angle\frac{2}{\boxed{1-1.62^2+1.62j}}=\angle 2-\boxed{\angle(-1.62+1.62j)}$$

$$=0^\circ-\boxed{135^\circ}=-135^\circ$$



複素平面上のベクトル $G(1.62j)$



7

第 5 章 : 周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード : 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

5.2 ベクトル軌跡

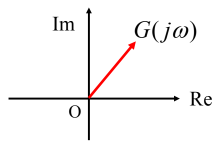
キーワード : ベクトル軌跡

学習目標 : 動的システムの周波数応答特性を理解する。
ベクトル軌跡による表示ができるようにする。

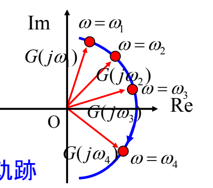
8

5.2 ベクトル軌跡

周波数 ω を一つ定めると,
$G(j\omega)$ はある複素平面上の
ベクトルとして表せる.



ω を $0\sim+\infty$ と変化させると
$G(j\omega)$ は軌跡を描く



ベクトル軌跡

9

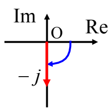
積分系 $G(s)=\dfrac{1}{s}$

周波数伝達関数 $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$

ゲイン $|G(j\omega)|=\dfrac{|1|}{|j\omega|}=\dfrac{1}{|\omega|}$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{j\omega}=\angle 1-\angle j\omega$$
$$=0-90^\circ=-90^\circ$$



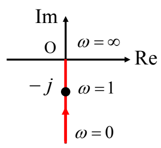


図 5.3 $G(s)=1/s$ のベクトル軌跡

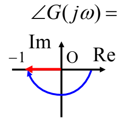
2 重積分系 $G(s)=\dfrac{1}{s^2}$

周波数伝達関数 $G(j\omega)=\dfrac{-1}{\omega^2}$

ゲイン $|G(j\omega)|=\dfrac{1}{\omega^2}$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{-1}{\omega^2}=\angle(-1)-\angle\omega^2$$
$$=-180^\circ-0^\circ$$



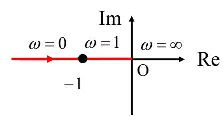


図 5.3 $G(s)=1/s^2$ のベクトル軌跡

積分系と位相遅れ

$\times\dfrac{1}{s}$: -90° 回転

90° 位相が遅れる

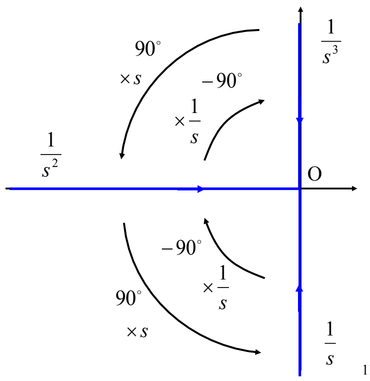
微分系と位相進み

$\times s$: 90° 回転

90° 位相が進む

動的システム

振幅と位相



11

1 次系 $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$ $(K=1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$$

ゲイン

$$|G(j\omega)|=\frac{|1|}{|1+j\omega T|}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{1+j\omega T}$$
$$=\angle 1-\angle(1+j\omega T)$$
$$=0^\circ-\tan^{-1}(\omega T)$$

出発点 (1,0)
終点 -90°

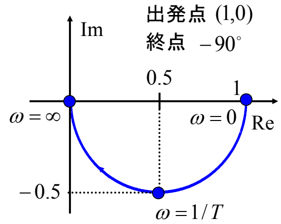


図 5.4 1 次系のベクトル軌跡

$\omega T=0$	$\lvert G\rvert=1$	$\angle G=0^\circ$
$\omega T=1$	$\lvert G\rvert=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\angle G=-45^\circ$
$\omega T\approx\infty$	$\lvert G\rvert\approx 0$	$\angle G\approx-90^\circ$

複素数の極形式

12

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{0.5(1+j\omega T)+0.5(1-j\omega T)}{1+j\omega T}$$

$$=0.5+0.5\cdot\frac{1-j\omega t}{1+j\omega t}$$

実軸の正方向に 0.5 平行移動

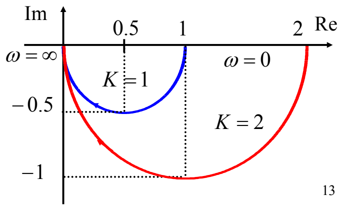
$$0.5\cdot\frac{|1-j\omega t|}{|1+j\omega t|}=0.5 \quad \forall\omega$$

半径 0.5 の円周

中心 (0.5,0)
半径 0.5 の（半）円周上を動く

$\frac{K}{Ts+1}$ の場合

ゲイン K をかけると
原点を中心として K 倍に
拡大（縮小）される



13

2 次系 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ $(K=1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n\omega j+\omega_n^2}$$
$$=\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j+1}$$
$$=\frac{1}{(j\Omega)^2+2\zeta\Omega j+1}=\frac{1}{(1-\Omega^2)+j2\zeta\Omega} \quad \left(\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle([1-\Omega^2]+j[2\zeta\Omega]) \quad =-\tan^{-1}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$$

14

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

出発点 (1,0)
終点 -180°

ゲイン

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle([1-\Omega^2]+j[2\zeta\Omega])$$

$\Omega=0$	$\lvert G\rvert=1$	$\angle G=(-0^\circ)=0^\circ$
$\Omega=1$	$\lvert G\rvert=\frac{1}{2\zeta}$	$\angle G=-90^\circ$
$\Omega\approx\infty$	$\lvert G\rvert\approx 0$	$\angle G\approx-180^\circ$

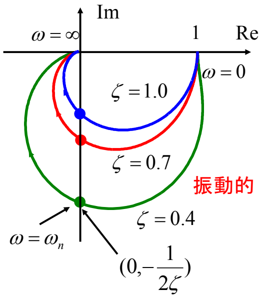
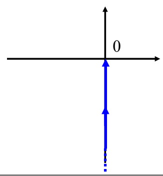


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡

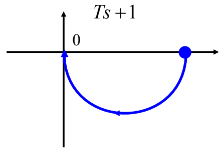
15

ベクトル軌跡の出発点と終点

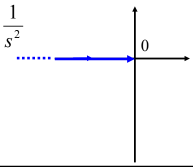
積分系 $\frac{1}{s}$



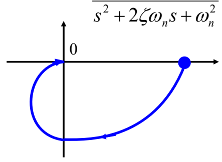
1次系 $\frac{1}{Ts+1}$



2重積分系 $\frac{1}{s^2}$



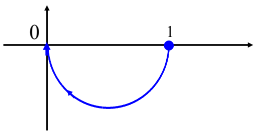
2次系 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$



16

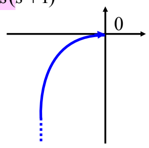
原点 $(s=0)$ に極をもたないとき

$G(s)=\frac{1}{s+1}$ $\quad l=0,\ n-m=1$



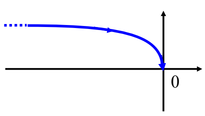
原点に1位の極をもつとき

$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$ $\quad l=1,\ n-m=2$



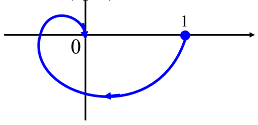
原点に2位の極をもつとき

$G(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$ $\quad l=2,\ n-m=3$



原点に極をもたないとき

$G(s)=\frac{1}{(s+1)^3}$ $\quad l=0,\ n-m=3$



17

第 5 章：周波数応答

5.3 ボード線図

キーワード：ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線

5.4 ボード線図の性質

キーワード：ボード線図の利点

学習目標：ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができるようにする。折れ線近似により、高次系のボード線図が描けるようにする。

18

5.3 ボード線図

周波数 ω に対し $\begin{cases} |G(j\omega)| \text{ の変化を表すゲイン曲線} \\ \angle G(j\omega) \text{ の変化を表す位相曲線} \end{cases}$

横軸：周波数 ω を対数目盛り　(1 デカード(dec)　$\omega_2 = 10\omega_1$)

縦軸：ゲイン曲線　$20\log_{10}|G(j\omega)|$　デシベル値(dB)

位相曲線　($^\circ$) 度

絶対値 $\lvert G(j\omega)\rvert$	0.1	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
デシベル値	−20 dB	0 dB	3 dB	6 dB	20 dB	40 dB

19

積分系　$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

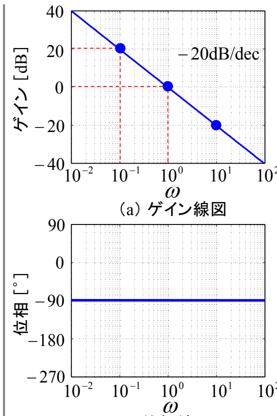
ゲイン(デシベル値)

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = 20\log\frac{1}{|\omega|} = -20\log|\omega|$$

$$\begin{cases} \omega = 0.1 \\ \quad -20\log 0.1 = -20\times(-1) = 20 \ \text{dB} \\ \omega = 1 \\ \quad -20\log 1 = -20\times 0 = 0 \ \text{dB} \\ \omega = 10 \\ \quad -20\log 10 = -20\times 1 = -20 \ \text{dB} \end{cases}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle j = -90^\circ$$



(a) ゲイン線図　(b) 位相線図

20

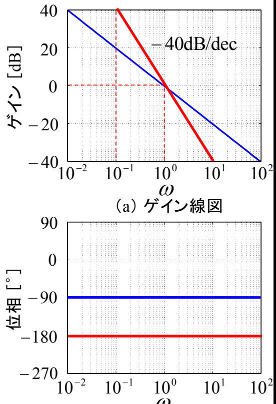
2 重積分系　$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$

ゲイン(デシベル値)

$$20\log\frac{1}{|(j\omega)^2|} = 20\log\frac{1}{\omega^2} = 20(\log 1 - 2\log\omega) = -40\log\omega$$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle(-1) - \angle\omega^2 = -180^\circ$$



(a) ゲイン線図　(b) 位相線図

図 5.6 積分系のボード線図

21

1 次系　$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$

ゲイン(デシベル値)

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

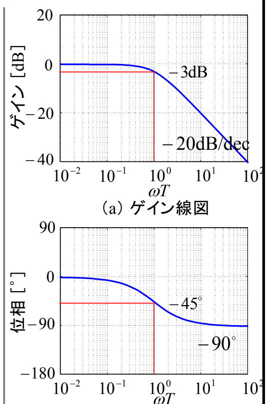
位相

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

$\omega T << 1$　$G(j\omega) \approx 1$

$\omega T >> 1$　$G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega T}$

$$\begin{cases} \omega T << 1 & 20\log|G| \approx 20\log 1 = 0 \ \text{dB} \\ & \angle G = 0^\circ \\ \omega T = 1 & 20\log|G| = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \ \text{dB} \\ & \angle G = -45^\circ \\ \omega T >> 1 & 20\log|G| \approx -20\log|\omega T| \ \text{dB} \\ & \angle G \approx -90^\circ \end{cases}$$



(a) ゲイン線図　(b) 位相線図

図 5.7 1 次系のボード線図

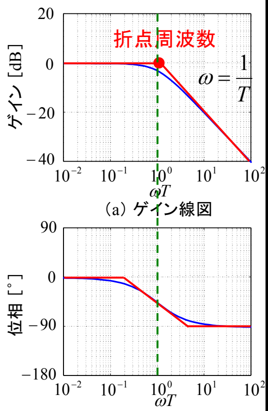
22

折れ線近似

(ゲイン) 0 dB と −20 dB/dec の 2 本の直線

(位相)　$\omega \le \frac{1}{5}\frac{1}{T}$ で　0°

$\omega \ge 5\frac{1}{T}$ で　-90°

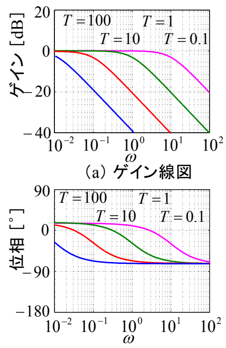


(a) ゲイン線図　(b) 位相線図

図 5.7 1 次系のボード線図

23

T が変化しても(形を変えず)
横軸方向に平行移動



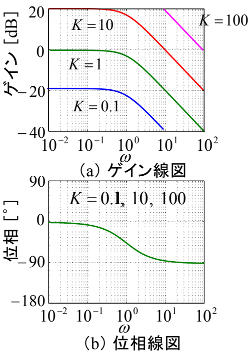
(a) ゲイン線図　(b) 位相線図

図 5.8 種々の時定数に対する 1 次系のボード線図

24

ゲイン K 倍しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}\quad (T=1)$$



2 次系 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\qquad (K=1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n\omega j+\omega_n^2}=\frac{1}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}j+1}=\frac{1}{(j\Omega)^2+2\zeta\Omega j+1}=\frac{1}{1-\Omega^2+2\zeta\Omega j}\quad\left(\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle([1-\Omega^2]+j[2\zeta\Omega])=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$$

2 次系 $G(j\omega)=\dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}=\dfrac{1}{(1-\Omega^2)+2\zeta\Omega j}\quad\left(\Omega=\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)$

ゲイン（デシベル値）

$$20\log|G(j\omega)|=20\log\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle((1-\Omega^2)+j(2\zeta\Omega))$$

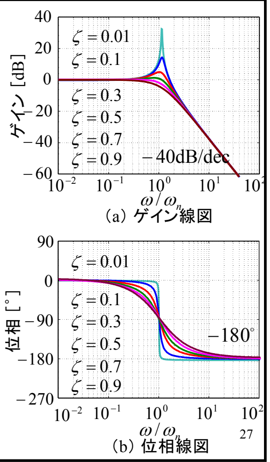
$\Omega<<1\quad G(j\omega)\approx 1$

$\Omega>>1\quad G(j\omega)\approx\dfrac{1}{-\Omega^2}$

$\Omega<<1\quad 20\log|G|=20\log\dfrac{1}{\sqrt{1}}\approx 0$ dB, $\angle G\approx 0^\circ$

$\Omega=1\quad 20\log|G|=20\log\left|\dfrac{1}{2\zeta}\right|$ dB, $\angle G=-90^\circ$

$\Omega>>1\quad 20\log|G|\approx-40\log|\Omega|$ dB, $\angle G\approx-180^\circ$



$\Omega=0$	$\lvert G\rvert=1$	$\angle G=(-0^\circ)=0^\circ$
$\Omega=1$	$\lvert G\rvert=\dfrac{1}{2\zeta}$	$\angle G=-90^\circ$
$\Omega\approx\infty$	$\lvert G\rvert\approx 0$	$\angle G\approx-180^\circ$

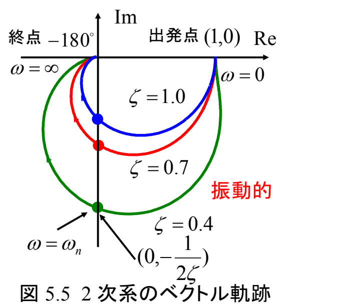
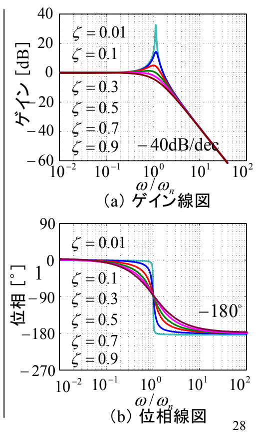


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡



まとめ

1 次系 $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}$ **2 次系** $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

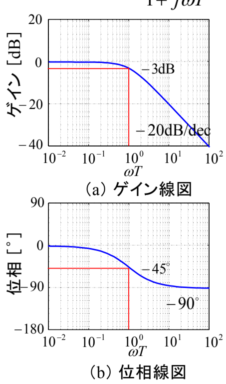


図 5.7 1 次系のボード線図

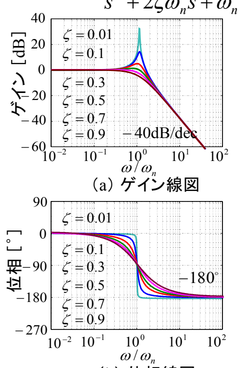
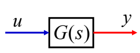
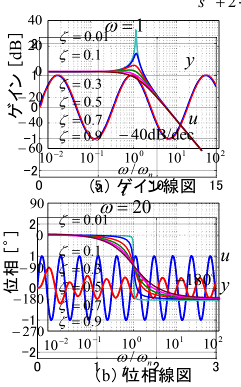
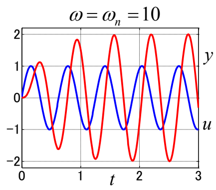


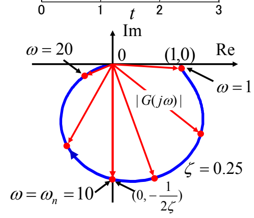
図 2 次系のボード線図

2 次系 $G(s)=\dfrac{100}{s^2+5s+100}=\dfrac{10^2}{s^2+2\cdot\frac{1}{4}\cdot 10s+10^2},\quad \zeta=0.25,\ \omega_n=10$









第 5 章 :周波数応答

5.3 ボード線図

キーワード : ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ボード線図の利点

学習目標 : ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができるようにする。折れ線近似により、高次系のボード線図が描けるようにする。

31

5.4.2 ボード線図の利点

［アイデア］

ゲイン : 対数スケール　$20\log|G(j\omega)|$

位相 : 線形スケール　$\angle G(j\omega)$

$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$　直列結合の表現が容易

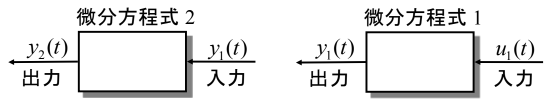
32

伝達関数表現のメリット (微分方程式表現の問題点)

教科書 [1], pp.20/22, 例 2.5, 2.6（直列結合の表現）

［ 例 2.5 ］ システムの結合（微分方程式）

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} + 2\dfrac{dy_1}{dt} + 3y_1 = \dfrac{du_1}{dt} + u_1 \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} + 3\dfrac{dy_2}{dt} + 3y_2 = 2\dfrac{dy_1}{dt} + y_1 \end{cases}$$



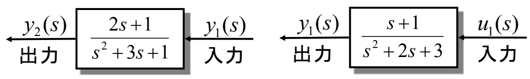
連立微分方程式

33

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} + 2\dfrac{dy_1}{dt} + 3y_1 = \dfrac{du_1}{dt} + u_1 \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} + 3\dfrac{dy_2}{dt} + 3y_2 = 2\dfrac{dy_1}{dt} + y_1 \end{cases}$$

［ 例 2.6 ］ システムの結合（伝達関数）

$$y_1(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+3}u_1(s) \qquad y_2(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+1}y_1(s)$$



$$y_2(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+1}\cdot\frac{s+1}{s^2+2s+3}u_1(s)$$ 伝達関数の積

34

$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$　（直列結合）

極形式で表示

$G(j\omega) = re^{j\theta}$　　$G_i(j\omega) = r_i e^{j\theta_i}$　$(i = 1 \sim 3)$

$$re^{j\theta} = (r_1e^{j\theta_1})(r_2e^{j\theta_2})(r_3e^{j\theta_3}) = r_1r_2r_3e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$r = r_1r_2r_3 \qquad \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

35

$$G(j\omega) = re^{j\theta} = r_1r_2r_3e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$\begin{aligned} 20\log|G(j\omega)| &= 20\log r = 20\log(r_1r_2r_3) \\ &= 20\log r_1 + 20\log r_2 + 20\log r_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} 20\log r_i = \sum_{i=1}^{3} 20\log|G(j\omega)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3}\theta_i = \sum_{i=1}^{3}\angle G(j\omega) \end{aligned}$$

直列結合のとき，ゲインと位相を単純に加えあわせればよい

36

$$G^{-1}(s)=\frac{1}{G(s)}$$ （逆システム）のボード線図

ゲイン

$$20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right|=20(\log 1-\log|G(j\omega)|)=-20\log|G(j\omega)|$$

位相

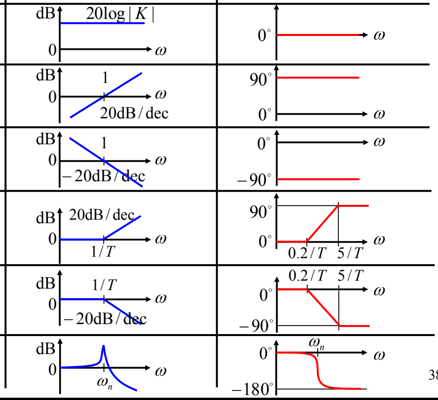
$$\angle\frac{1}{G(j\omega)}=\angle 1-\angle G(j\omega)=-\angle G(j\omega)$$

逆システムでは，ゲインと位相の符号を反転

37

表 5.1　基本要素のボード線図

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K		
s		
$\frac{1}{s}$		
$Ts+1$		
$\frac{1}{Ts+1}$		
$\frac{\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$		



38

K が変化しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}\quad (T=1)$$

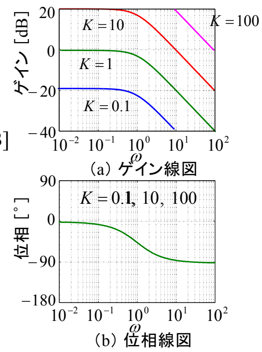
$K=0.1$

$+20$ [dB] $(\times 10)$

$+40$ [dB] $(\times 100)$

$K=1$

$K=10$



(a) ゲイン線図

(b) 位相線図

39

[例 5. 1]　ゲイン線図の重ね合わせ

$$G(s)=\frac{100(s+1)}{s(s+10)}=G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$
$$=10\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.1s+1}\cdot(s+1)$$

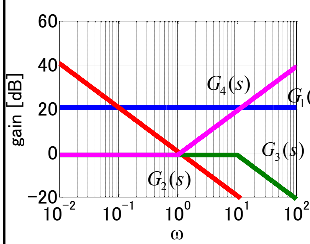


図 5. 12　各要素のゲイン線図
（折れ線近似）

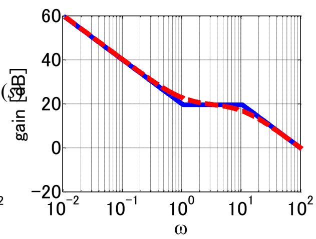


図 5. 13　$G(s)$のゲイン線図
（折れ線近似と実際の曲線）

[例 5. 1]　位相線図の重ね合わせ

$$G(s)=\frac{100(s+1)}{s(s+10)}=G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$
$$=10\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.1s+1}\cdot(s+1)$$

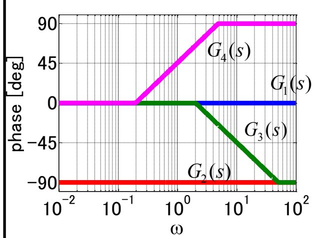


図 5. 12　各要素の位相線図
（折れ線近似）

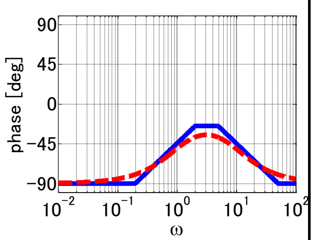


図 5. 13　$G(s)$の位相線図
（折れ線近似と実際の曲線）

ボード線図の利点

- システムを直列結合したもののボード線図は各システムのボード線図を単に加え合わせるだけで得られる.
- 折れ線近似が容易で，システムの概略特性を簡単に精度よく把握できる.
- 広い周波数帯域を1枚の図面で扱える.
- 実験データからボード線図を描くことも容易である.

42

第 5 章：周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード：周波数伝達関数，ゲイン，位相

5.2 ベクトル軌跡

キーワード：ベクトル軌跡

学習目標：動的システムの周波数応答特性を理解する。
ベクトル軌跡による表示ができるようにする。

43

第 5 章：周波数応答

5.3 ボード線図

キーワード：ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線

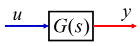
5.4 ボード線図の性質

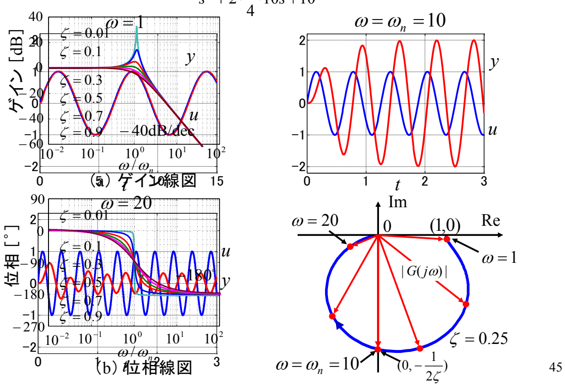
キーワード：ボード線図の利点

学習目標：ボード線図を用いて周波数特性を図式的に
表すことができるようにする。折れ線近似に
より、高次系のボード線図が描けるようにする。

44

2 次系 $G(s)=\dfrac{100}{s^2+5s+100}=\dfrac{10^2}{s^2+2\cdot\frac{1}{4}\cdot 10s+10^2}$,　$\zeta=0.25$, $\omega_n=10$





45