

第5章：周波数応答

復習

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード： 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

5.2 ベクトル軌跡

キーワード： ベクトル軌跡

学習目標： 動的システムの周波数応答特性を理解する。
ベクトル軌跡による表示ができるようにする。

1

第5章：周波数応答

復習

5.3 ボード線図

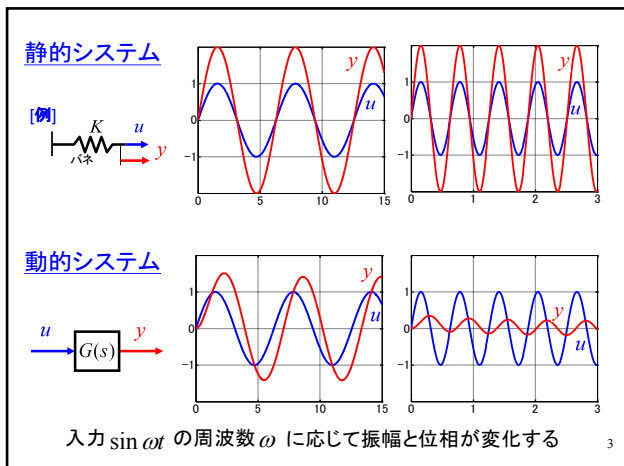
キーワード： ボード線図, ゲイン曲線, 位相曲線

5.4 ボード線図の性質

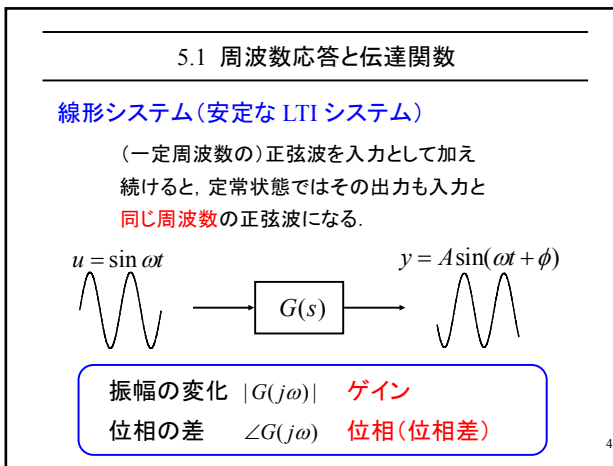
キーワード： ボード線図の利点

学習目標： ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができるようにする。折れ線近似により、高次系のボード線図が描けるようにする。

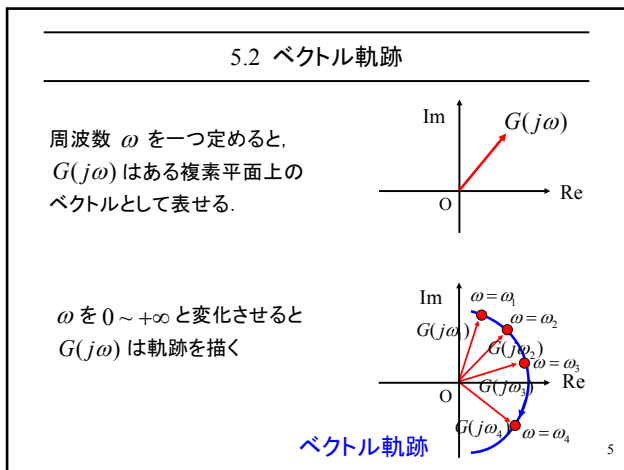
2



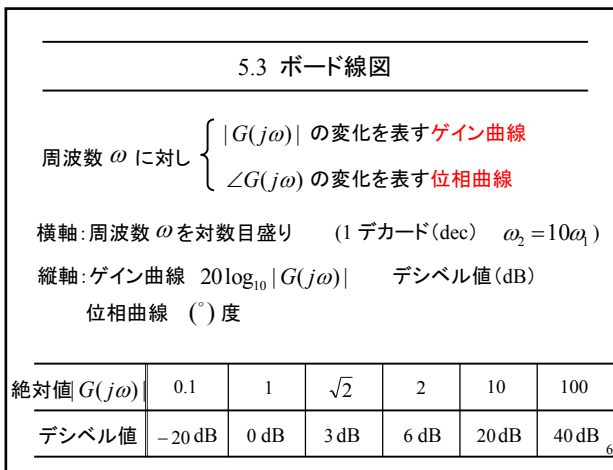
3



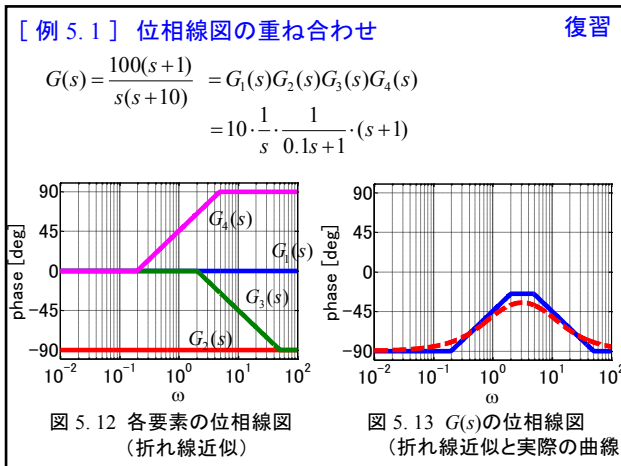
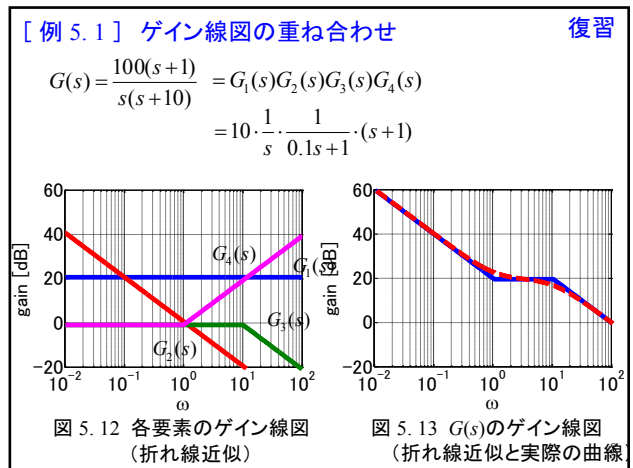
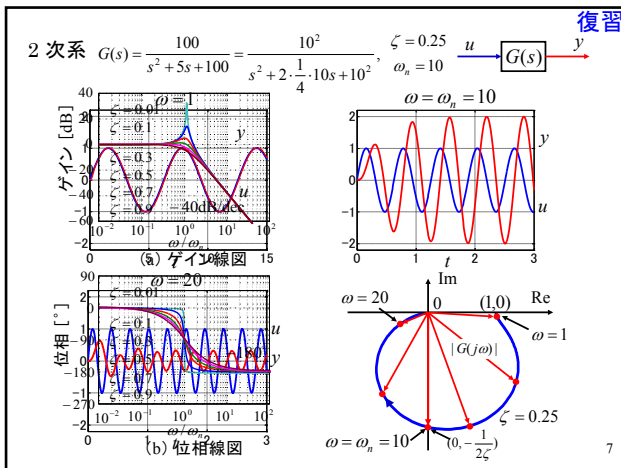
4



5



6



第 6 章 : フィードバック制御系の安定性

6.1 フィードバック系の内部安定性

キーワード : 内部安定性, 特性多項式

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード : ナイキストの安定判別法

学習目標 : フィードバック制御系の内部安定性について理解する。ナイキストの安定判別法を理解し、フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる。

10

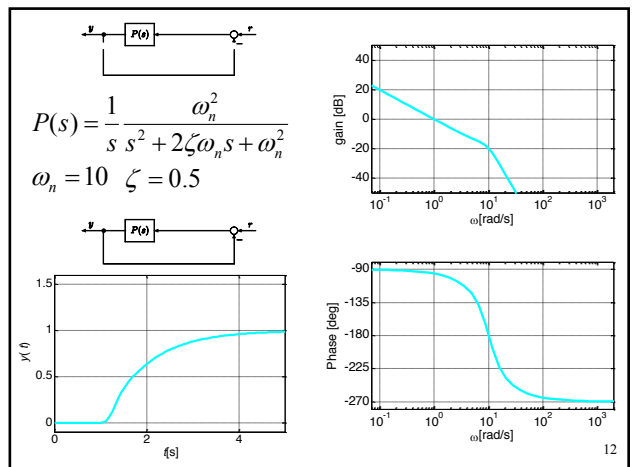
第 6 章 : フィードバック制御系の安定性

6.3 ゲイン余裕, 位相余裕

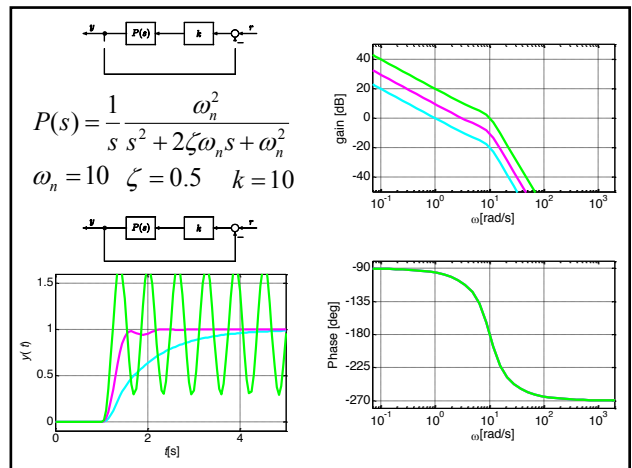
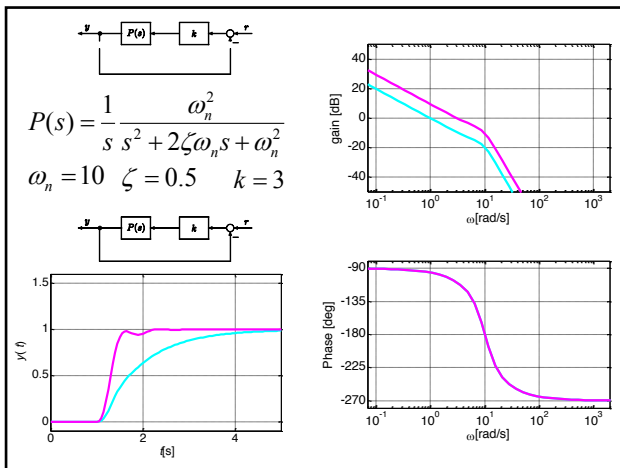
キーワード : 位相差差周波数, ゲイン交差周波数, 位相余裕, ゲイン余裕

学習目標 : 簡単化されたナイキストの安定判別法について理解する。安定性の程度を評価する。ゲイン余裕や位相余裕について理解する。

11



dynamical systems and control 03 04



ダイナミカルシステムの安定性 (復習: 3.5 節)

安定性 (有界入力 有界出力安定 (BIBO 安定))
 有界な大きさの任意の入力 ($|u(t)| < \infty$) に対して、その出力がやはり有界 ($|y(t)| < \infty$) であるとき、**安定**という。

安定でない = 不安定

15

安定: すべての有界入力 ($|u(t)| < \infty$) に対して、出力が有界 ($|y(t)| < \infty$) の場合
不安定: 安定でない場合

$G(s) = \frac{1}{s+1}$

安定なシステム (かな)

$G(s) = \frac{1}{s}$

不安定なシステム

16

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$N(s) = 0$ の根: z_1, z_2, \dots, z_m $G(s)$ の **零点**
 $D(s) = 0$ の根: p_1, p_2, \dots, p_n $G(s)$ の **極**

$\text{Re } z_j < 0$ **安定** 零点 $\text{Re } z_j \geq 0$ **不安定** 零点
 $\text{Re } p_j < 0$ **安定** 極 $\text{Re } p_j \geq 0$ **不安定** 極

安定性 有界入力 $u(t)$ \rightarrow 有界出力 $y(t)$

↓ ↑ (教科書 p.56)

すべての極が **安定** $\text{Re } p_j < 0 \quad j=1, 2, \dots, n$

17

6.1 フィードバック系の内部安定性

[例 6.1] 不安定な極零相殺

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad C(s) = \frac{s-1}{s}$$
$$y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \cdot r(s)$$

$$= \frac{\frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s}}{1 + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s}} \cdot r(s) = \frac{1}{s+1} \cdot r(s)$$

安定?

$$P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s} = \frac{1}{s}$$

18

[例 6.1] 不安定な極零相殺

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad C(s) = \frac{s-1}{s}$$

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \cdot r(s)$$

$$= \frac{\frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} \cdot r(s) = \frac{1}{s+1} \cdot r(s)$$

安定?

$$P(s)K(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s} = \frac{1}{s}$$

フィードバック系の内部安定性

内部安定性 ($T = G_{yr}$ だけでは不十分)

外部から加わる信号 $\{r(s), d(s)\}$ から各要素の出力 $\{u(s), y(s)\}$ への4つの伝達関数がすべて安定

20

内部安定性

外部から加わる信号 $\{r(s), d(s)\}$ から各要素の出力 $\{u(s), y(s)\}$ への4つの伝達関数がすべて安定

G_{yr} だけでは不十分

$$G_{ur}(s) = \frac{K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{ud}(s) = \frac{-P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}$$

21

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad K(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} \quad \text{既約}$$

$$G_{ur} = \frac{D_p(s)N_k(s)}{\phi(s)} \quad G_{ud} = \frac{-N_p(s)N_k(s)}{\phi(s)}$$

$$G_{yr} = \frac{N_p(s)N_k(s)}{\phi(s)} \quad G_{yd} = \frac{N_p(s)D_k(s)}{\phi(s)}$$

$$\phi(s) := D_p(s)D_k(s) + N_p(s)N_k(s)$$

特性多項式

[定理] (内部安定性の必要十分条件)

特性多項式

$$\phi(s) := D_p(s)D_k(s) + N_p(s)N_k(s) = 0$$

のすべての根の実部が負

22

[例 6.1]

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad K(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)}$$

$$\phi(s) := D_p(s)D_k(s) + N_p(s)N_k(s)$$

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad K(s) = \frac{s-1}{s}$$

$$\phi(s) = (s-1) \cdot s + 1 \cdot (s-1) = (s-1)(s+1) = 0$$

不安定

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)}$$

不安定な極零相殺が生じている

$P(s)$ と $K(s)$ の間に不安定な極零相殺が存在するとき、フィードバック制御系は内部安定ではない。(教科書 p.109)

23

第6章: フィードバック制御系の安定性

6.1 フィードバック系の内部安定性

キーワード: 内部安定性, 特性多項式

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード: ナイキストの安定判別法

学習目標: フィードバック制御系の内部安定性について理解する. ナイキストの安定判別法を理解し, フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる.

24

6.2 ナイキストの安定判別法

フィードバック系の内部安定性

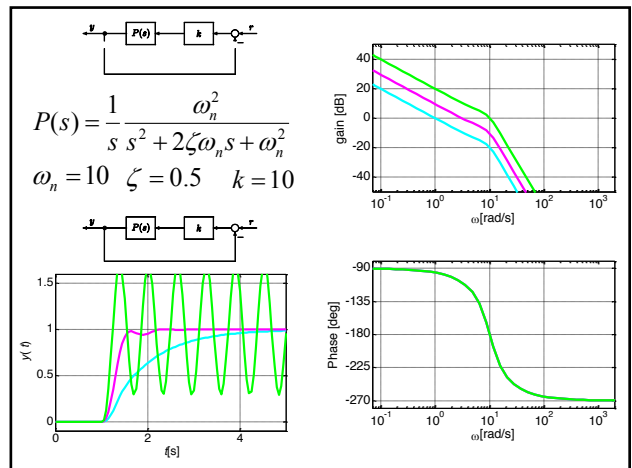
⇔ 特性多項式 $\phi(s)=0$ の根を求める

因数分解などにより、直接計算する
 実際のでない
 ↓
 ラウス=フルビッツの安定判別法を適用する
 高次系では手間がかかる

開ループ伝達関数の周波数応答に基づき図的に判別する

開ループ伝達関数 $L = PC$

25



ナイキストの安定判別法

[1] 目的

$\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: 開ループ系 $P(s)K(s)$ の極

$\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$: 閉ループ系(制御系)の極

$$\frac{1+P(s)K(s)}{\text{還送差}} = 1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \cdot \frac{N_k(s)}{D_k(s)} = \frac{D_p(s)D_k(s) + N_p(s)N_k(s)}{D_p(s)D_k(s)}$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{\text{(閉ループ系の極)}}{\text{(開ループ系の極)}}$$

$\Pi = (\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \text{ の中で})$ 開ループ系の不安定極の数 知っている

$Z = (\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \text{ の中で})$ 閉ループ系の不安定極の数 知りたい

27

[2] 方法

閉曲線 C (このなかですべての不安定な極がある)

Π = 閉曲線 C の内部にある開ループ系の極の数

Z = 閉曲線 C の内部にある閉ループ系の極の数

図 6.3(a) 右半平面全体を囲む閉曲線 C

28

写像 $w = 1 + P(s)K(s)$ 複素数 s を決めると、対応する複素数 w が定まる。

s : (閉曲線 C に沿って)

$O \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow O$ と時計方向に 1 回転

このとき、対応する w が描く軌跡: Γ_1

$N = \Gamma_1$ が原点を時計方向にまわる回転数

図 6.3 閉曲線 C とその $1 + P(s)K(s)$ による像 Γ_1

29

$$Z = N + \Pi$$

Π : 閉曲線 C の内部にある開ループ系の極の数 (知っている)

Π : 既知

N : 図的に調べる

Z : 閉曲線 C の内部にある閉ループ系の極の数 (知りたい)

N : Γ_1 が原点を時計方向にまわる回転数 (数える)

↓

Z : 知ることができる

$Z = 0$ ならば安定

$Z \neq 0$ ならば不安定

30

[4] ベクトル軌跡の利用

$v = P(s)K(s) \xrightarrow{\text{右に1だけ移動}} w = 1 + P(s)K(s)$

Γ : ナイキスト軌跡 Γ_1

Γ が点 $(-1,0)$ を N 回まわる \leftarrow Γ_1 が原点を N 回まわる

31

s :

- C 上を $0 \rightarrow a$ と動くとき、ベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ ($\omega = 0 \sim +\infty$) に一致する
- 半径 ∞ の円周上を動くとき $P(\infty)K(\infty) = 0$
- C 上を $c \rightarrow 0$ と動くとき、ベクトル軌跡と実軸に関して対称

32

ナイキストの安定判別法

[ステップ 1] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を、角周波数 $\omega = 0 \sim +\infty$ の範囲で描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 Γ を得る。

[ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1,0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。

[ステップ 3] 開ループ伝達関数 $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを Π とする。

[ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。したがって、 $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定、 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

33

安定 $\Leftrightarrow Z = 0 \Leftrightarrow -N = \Pi$

ナイキスト軌跡が点 $(-1,0)$ のまわりを反時計方向にまわる回数が、開ループ伝達関数の不安定極の個数に等しいならば、制御系は安定である。

ナイキストの安定判別法の利点

- ループを閉じる前の開ループ伝達関数の周波数応答によって、図的に制御系(閉ループ系)の安定性を判別できる
- 計算の必要がなく、次数の高い系やむだ時間系にも容易に適用できる
- 実測データに基づいて判定できる
- 直感的に分かりやすく、さらに安定余裕も調べられる

34

いま考えているのは、どの伝達関数?

35

[例 6.2]

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

[ステップ 1]

[ステップ 2] $N = 0$

[ステップ 3] $\Pi = 0$

[ステップ 4] $Z = N + \Pi = 0$ **制御系は安定**

36

[例 6.3] (不安定系の場合)
 $L(s) = \frac{K}{s-1} \quad K=2, \frac{3}{4}$

[ステップ 1] (a) $K=2$ (b) $K=\frac{3}{4}$

[ステップ 2] $N = -1$ (a) $N = 0$ (b)
[ステップ 3] $\Pi = 1$ (a) $\Pi = 1$ (b)
[ステップ 4] $Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$ (a) $Z = N + \Pi = 0 + 1 = 1 \neq 0$ (b)

安定 不安定

37

[例 6.4] (虚軸上に極がある場合)
 $L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

[ステップ 1] 閉曲線 C に対するナイキスト軌跡
 $\Rightarrow \omega = 0$ の近傍で不連続, N を求められない

38

$s=0$ を回避し, 左に見るように経路 $d \rightarrow e \rightarrow f$
 (新たな閉曲線 C 内に $s=0$ の極は入らない)

経路 $d \rightarrow e \rightarrow f \quad s = \varepsilon e^{j\theta} \quad (\varepsilon \rightarrow 0, -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$

$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} (\varepsilon e^{j\theta} + 1)(\varepsilon e^{j\theta} + 2)}$

$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{2\varepsilon} \frac{e^{-j\theta}}{+90^\circ \text{から} -90^\circ \text{へ}}$
 半径 ∞ の円周 時計方向に

39

[ステップ 2] $N = 0$
[ステップ 3] $\Pi = 0$
[ステップ 4] $Z = N + \Pi = 0 \quad \text{制御系は安定}$

40

第 6 章 : フィードバック制御系の安定性

6.1 フィードバック系の内部安定性
 キーワード : 内部安定性, 特性多項式

6.2 ナイキストの安定判別法
 キーワード : ナイキストの安定判別法

学習目標 : フィードバック制御系の内部安定性について理解する. ナイキストの安定判別法を理解し, フィードバック制御系の安定性を判定できるようにする.

41

第 6 章 : フィードバック制御系の安定性

6.3 ゲイン余裕, 位相余裕
 キーワード : 位相交差周波数, ゲイン交差周波数, 位相余裕, ゲイン余裕

学習目標 : 単純化されたナイキストの安定判別法について理解する. 安定性の程度を評価する. ゲイン余裕や位相余裕について理解する.

42

開ループ伝達関数が安定な場合
 開ループ極 $\Pi=0$ より
 閉ループ極 $Z=0$ となるためには $N=0$
 $(\because Z=N+\Pi)$

簡易化されたナイキストの安定判別法

[ステップ 1] 開ループ伝達関数の極の中に、その実部が正となるものがないことを確認する。

[ステップ 2] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を角周波数 $\omega=0 \sim +\infty$ の範囲で描く。

[ステップ 3] ω を 0 から ∞ へ変化させたとき、この開ループ伝達関数のベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ をつねに左に見るように動かなければ、系は安定である。また、右に見れば系は不安定となる。

43

[例 6.5] (安定系の場合)

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad K=3, 6, 12$$

$K=3$ のとき
 点 $(-1,0)$ を常に左に見る
 \Rightarrow 安定

$K=6$ のとき
 ちょうど点 $(-1,0)$ を通過する
 \Rightarrow 安定限界

$K=12$ のとき
 点 $(-1,0)$ を右に見るようになる
 \Rightarrow 不安定

44

[例] 簡易化されたナイキストの安定判別法

45

6.3 ゲイン余裕, 位相余裕

(a) 安定 (b) 安定限界 (c) 不安定

図6.11 ベクトル軌跡と安定性

46

安定限界のとき,
 ベクトル軌跡がちょうど点 $(-1,0)$ の上を通る
 $\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ$ のとき
 $|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| = 1$

ω_{pc} : ベクトル軌跡の位相が -180° になる周波数

(b) 安定限界

図6.11 ベクトル軌跡と安定性

47

安定のとき,
 $\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ$ のとき
 $|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| < 1$

(a) 安定

図6.11 ベクトル軌跡と安定性

不安定のとき,
 $\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ$ のとき
 $|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| > 1$

(c) 不安定

図6.11 ベクトル軌跡と安定性⁸

位相差差周波数 ω_{pc}

ベクトル軌跡が負の実軸を横切る点 P に対応
位相が -180° になる

(a) 安定 (b) 安定限界 (c) 不安定

49

ゲイン交差周波数 ω_{gc}

ゲインがちょうど 1 になる点 G に対応
単位円を横切る

$\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) > -180^\circ$ 安定
 $\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) = -180^\circ$ 安定限界
 $\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) < -180^\circ$ 不安定

(a) 安定 (b) 安定限界 (c) 不安定

50

ベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ からある程度離れているならば, **安定余裕**がある.

ゲイン余裕 GM
あとどれだけゲインを増やすと制御系が不安定になるか.
 $GM = \frac{1}{OP}$ (dB)

位相余裕 PM
あとどれだけ位相が遅れると制御系が不安定になるか.
 $PM = \angle GOP$ ($^\circ$)

図 ゲイン余裕, 位相余裕

51

[例] ゲイン余裕

$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$

安定
GM = 6

安定 (条件付安定)
GM = ∞

52

ボード線図での読み取り

(a) 位相が -180° より進む \Rightarrow 安定
 (b) 位相が -180° ちょうど \Rightarrow 安定限界
 (c) 位相が -180° より遅れる \Rightarrow 不安定

ゲイン交差周波数 ω_{gc} で PM を読み取る.

(a) 安定 (b) 安定限界 (c) 不安定

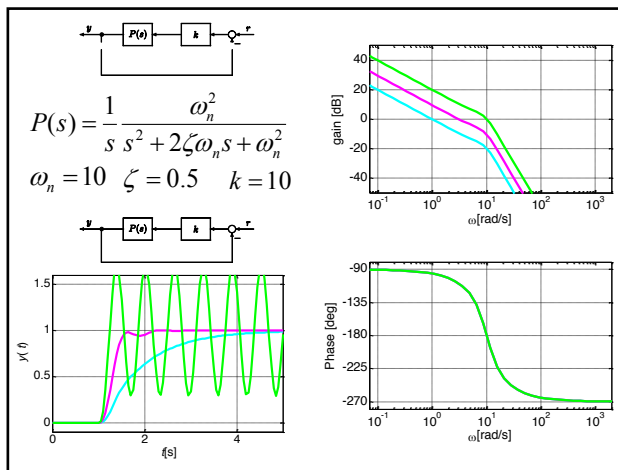
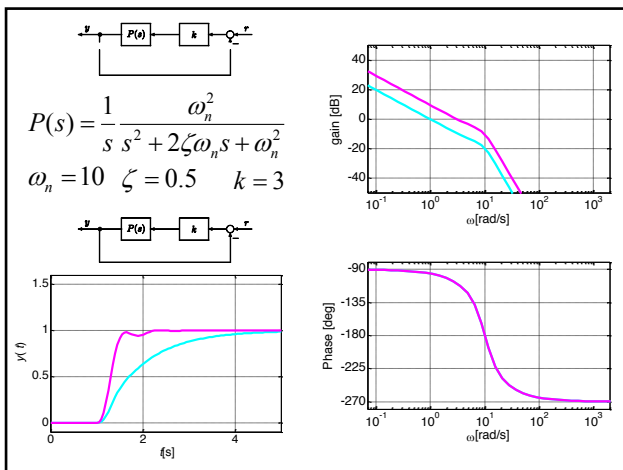
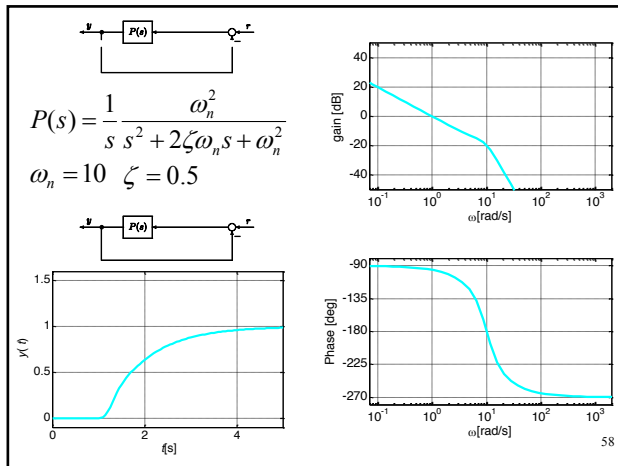
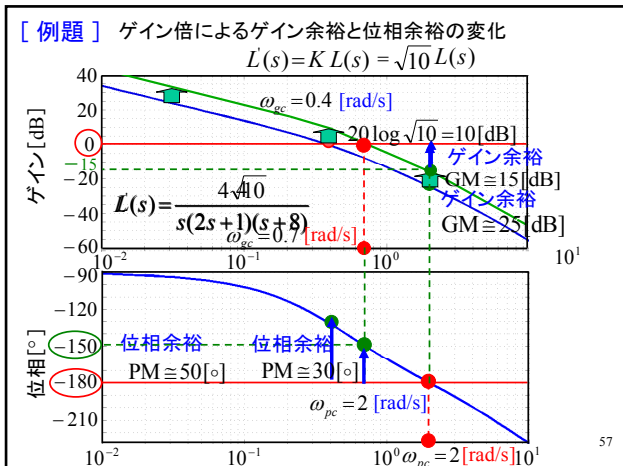
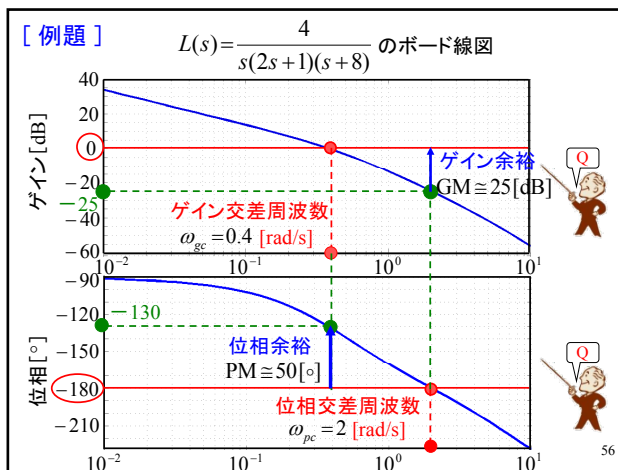
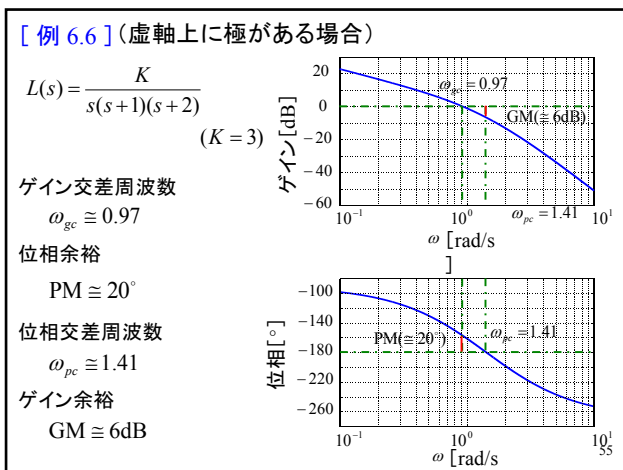
53

(a) ゲインが 0 dB より低い \Rightarrow 安定
 (b) ゲインが 0 dB ちょうど \Rightarrow 安定限界
 (c) ゲインが 0 dB より高い \Rightarrow 不安定

位相差差周波数 ω_{pc} で GM を読み取る.

(a) 安定 (b) 安定限界 (c) 不安定

54



第6章 : フィードバック制御系の安定性

6.1 フィードバック系の内部安定性

キーワード : 内部安定性, 特性多項式

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード : ナイキストの安定判別法

学習目標 : フィードバック制御系の内部安定性について理解する。ナイキストの安定判別法を理解し、フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる。

61

第6章 : フィードバック制御系の安定性

6.3 ゲイン余裕, 位相余裕

キーワード : 位相交差周波数, ゲイン交差周波数, 位相余裕, ゲイン余裕

学習目標 : 単純化されたナイキストの安定判別法について理解する。安定性の程度を評価する。ゲイン余裕や位相余裕について理解する。

62

[結果 1]

$P(s)$ と $K(s)$ の間に不安定な極零相殺が存在するとき、フィードバック制御系は内部安定ではない。

[結果 2]

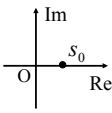
$P(s)$ と $K(s)$ の間に不安定な極零相殺が存在しないとき、以下の三つは等価である

- (a) フィードバック制御系が内部安定
- (b) $G_{yr}(s)$ が安定 $\left[G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \right]$
- (c) $1+P(s)K(s)$ の零点がすべて安定

63

[結果 1] の証明

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$


$s = s_0$ ($\text{Re}[s_0] \geq 0$) で $K(s)$ の極と $P(s)$ の零点が相殺したとする。
不安定

$$D_K(s_0) = N_P(s_0) = 0$$

$$\phi(s_0) = 0 \quad (\text{Re}[s_0] \geq 0)$$

$\phi(s)$ の根の一つである s_0 の実部は負ではない

フィードバック制御系が内部安定ではない

$K(s)$ の零点と $P(s)$ の極が相殺したときも同様。

64

[結果 2] (b) ⇔ (c) の証明*

$$S(s) = \frac{1}{1+P(s)K(s)} \text{ とおくと}$$

$$S(s) + G_{yr}(s) = \frac{1}{1+P(s)K(s)} + \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = 1 \text{ が成り立つ.}$$

(b) ⇒ (c)

$G_{yr}(s)$ が安定

$$S(s) = 1 - G_{yr}(s) \text{ が安定}$$

$S(s)$ の極がすべて安定

$1+P(s)K(s)$ の零点がすべて安定

逆も成立するので

(c) ⇒ (b)

65

[結果 2] (a) ⇔ (b) の証明*

(b) ⇒ (a) (a) ⇒ (b) は明らか

背理法

$P(s)$ と $K(s)$ の間に不安定な極零相殺が存在しないとき、
 $G_{yr}(s) = \frac{N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}$ が安定で、内部安定ではない、と仮定

内部安定ではない

$\text{Re}[s_0] \geq 0$ に対して $\phi(s)$ は $(s-s_0)$ を因子に持つ

$G_{yr}(s)$ の分子も $(s-s_0)$ でわり切れる

$$N_P(s_0)N_K(s_0) = 0 \quad \longrightarrow \quad D_P(s_0)D_K(s_0) = 0$$

$N_P(s_0) = 0$ の場合

$D_P(s_0) \neq 0$ かつ、不安定な極零相殺がない

$$\longrightarrow D_K(s_0) \neq 0 \quad \longrightarrow \quad D_P(s_0)D_K(s_0) = 0 \text{ に矛盾}$$

$N_K(s_0) = 0$ の場合も同様

66

[3] 証明

$$w = 1 + P(s)K(s) = \frac{(s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$\angle w = \sum_{i=1}^n \angle(s-r_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i)$$

ベクトル \vec{a}_i r_i が C の内部にあるとき: 正味 1 回転 (-360°)
 r_i が C の外部にあるとき: 正味の回転数は 0

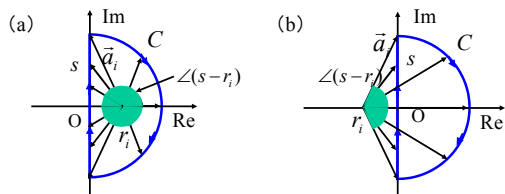


図 6.4 $(s-r_i)$ の偏角の変化

67

$$\angle w = \sum_{i=1}^n \angle(s-r_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \angle(s-r_i) \text{ の総変化量} = -360^\circ \times Z$$

$$\sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) \text{ の総変化量} = -360^\circ \times \Pi$$

$$\angle w \text{ の総変化量} = -360^\circ \times (Z - \Pi)$$

$$\therefore N = Z - \Pi$$

$$\text{よって } Z = N + \Pi$$

68