状態フィードバック $\mathcal{H}_\infty$ 制御と LQR の関係

簡単のため以下の仮定をおく：

- (A, B_2)：可安定、(C_1, A)：可検出、D_{12}：列フルランク、$G_{12}(s)$ は虚軸上に零点を持たない
- $D_{12}^TC_1 = 0,\ D_{12}^TD_{12} = R > 0,\ C_1^TC_1 = Q > 0$

問題 1 (状態フィードバック $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題) 与えられた一般化プラント

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{1}$$

と状態フィードバック $u = -Fx$ から成る閉ループ系を考える。

(i) 閉ループ系が安定

(ii) 閉ループ系の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが γ 未満となる

ための必要十分条件は、 ある小さな正数 ϵ に対して、次の ARE の解 $P > 0$ が存在することである。

$$A^TP + PA + P\left(\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2R^{-1}B_2^T\right)P + C_1^TC_1 + \epsilon I = 0 \tag{2}$$

また、このとき状態フィードバックゲイン F は次式で与えられる。

$$F = R^{-1}B_2^TP \tag{3}$$

証明 1 $(\Uparrow)$: *(i)*:略（LQR のときと同様に示せる）
(ii):

$$\int_0^\infty \left\{z^Tz - \gamma^2w^Tw\right\}dt = \int_0^\infty \left\{x^TQx + u^TRu - \gamma^2w^Tw\right\}dt \tag{4}$$

$$= \int_0^\infty \left[x^T\left\{-A^TP - PA + PB_2R^{-1}B_2^TP - \frac{1}{\gamma^2}PB_1B_1^TP - \epsilon I\right\}x + u^TRu - \gamma^2w^Tw - u^TB_2^TPx - x^TPB_2u \right.$$
$$\left. + u^TB_2^TPx + x^TPB_2u - w^TB_1^TPx - x^TPB_1w + w^TB_1^TPx + x^TPB_1w\right]dt \tag{5}$$

… 最後の *8* つの項は、足して、引いた *(*合わせると *0)*。

$$= \int_0^\infty \left[-\left\{x^TA^T + w^TB_1^T + u^TB_2^T\right\}Px - x^TP\left\{Ax + B_1w + B_2u\right\} + \left\{x^TPB_2R^{-1} + u^T\right\}R\left\{R^{-1}B_2^TPx + u\right\}\right.$$
$$\left. - \left\{\gamma w^T - \frac{1}{\gamma}x^TPB_1\right\}\left\{\gamma w - \frac{1}{\gamma}B_1^TPx\right\} - \epsilon x^Tx\right]dt \tag{6}$$

… それぞれの色毎に項をまとめた。

$$= -\int_0^\infty \dot{x}^TPx dt - \int_0^\infty x^TP\dot{x}dt - \int_0^\infty \left\{\gamma w^T - \frac{1}{\gamma}x^TPB_1\right\}\left\{\gamma w - \frac{1}{\gamma}B_1^TPx\right\}dt - \epsilon\int_0^\infty x^Txdt \tag{7}$$

… $\dot{x} = Ax + Bu$ と、$u = -R^{-1}B_2^TP$ より。

$$
\begin{aligned}
&= -\left[x^T P x\right]_0^\infty + \int_0^\infty x^T P \dot{x} dt - \int_0^\infty \underline{\underline{x^T P \dot{x}}} dt - \int_0^\infty \left\{\gamma w^T - \frac{1}{\gamma} x^T P B_1\right\}\left\{\gamma w - \frac{1}{\gamma} B_1^T P x\right\} - \epsilon \int_0^\infty x^T x dt \qquad (8)
\end{aligned}
$$

... 第 *1* 項を部分積分した。

$$
= x(0)^T P x(0) - \int_0^\infty \left\{\gamma w^T - \frac{1}{\gamma} x^T P B_1\right\}\left\{\gamma w - \frac{1}{\gamma} B_1^T P x\right\} - \epsilon \int_0^\infty x^T x dt \qquad (9)
$$

... 第 *2* 項と *3* 項は相殺する。第 *1* 項は、$x(\infty) = 0$ より。

$$
< 0. \qquad (10)
$$

上式が、任意の $w(t)$ に対して成り立つ。よって、

$$
\sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} < \gamma \qquad (11)
$$

が成り立ち、w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは γ 未満となる。