

平成30年度
長岡技術科学大学 大学院
工学研究科 修士論文

高慣性比二慣性系の外乱抑制問題に対する
慣性比 ∞ の解析解に基づく \mathcal{H}_∞ 補償器の構成

Construction of \mathcal{H}_∞ controller
based on analytical solution for infinite inertia ratio
in disturbance suppression problem
of two-inertia system with high inertia ratio

長岡技術科学大学 大学院 工学研究科
機械創造工学専攻 15301690
著者氏名 岩本 慎太郎
指導教員 小林 泰秀 准教授

平成31年2月1日

Abstract

1st,February,2019

Construction of \mathcal{H}_∞ controller
based on analytical solution for infinite inertia ratio
in disturbance suppression problem
of two-inertia system with high inertia ratio

No.15301690

IWAMOTO Shintaro

Department of Mechanical Engineering
Nagaoka University of Technology

In recent years for various plants of industrial machines, general-purpose servo motors have been developed and widely used as driving devices in order to achieve desirable control performance by user's as simple directions as possible. Some of such motors have so-called "auto-tuning" or "tuning-less" functions that help users adjusting the motors behavior with their little effort; the physical parameters of the target, e.g., inertia moment and/or torsional frequency, are estimated by combining inertia and friction estimation mechanisms. Furthermore, controller gains and notch filter's frequencies are automatically adjusted due to the parameter estimation.

Because industrial machines to which these motors are applied have recently become lighter and faster, the resonance frequencies are lowered due to a decrease in rigidity, and vibrations are easily excited with rapid operation. In addition, because the inertia ratio (the magnification of the moment of inertia of the load with respect to the moment of inertia of the drive unit) increases, the machine is more susceptible to the disturbance torque. On the other hand, since the PID controller and the notch filter which are empirically widely installed in general-purpose servo motors are stable, it is not always possible to obtain sufficient disturbance suppression performance.

This is not the case when robust control theory such as \mathcal{H}_∞ control is used to design control system because controllers that achieve sufficient disturbance suppression performance can be obtained. By using this controller, optimum performance is achieved in the sense of \mathcal{H}_∞ norm based on given information of plant. However, the relationship between the dynamic characteristics of the obtained controller and the physical parameters of the controlled object is not clear even in the case of simple two-inertia system.

Various methods have been studied as control methods of two-inertia system, but almost no cases of disturbance suppression problem of two-inertia system with high inertia ratio as this research considered are assumed. In a previous study, unstable quadratic controller structure with three tunable

parameters related to constant gain and notch depth is proposed.

This paper focuses on the gain characteristics of closed loop system in order to improve performance by using additional feedback. Many previous studies have chosen the pole placement method for the construction of the controller with additional feedback. However, there is no compensation as to whether it has optimal disturbance suppression performance. Therefore, there is no research targeting the optimal disturbance suppression performance by evaluating the *hinf* norm.

This paper propose a two design methods of the \mathcal{H}_∞ controller composed of two proportional feedback gains to the driving- and driven-side angular velocities for disturbance suppression problem of two-inertia high-inertia-ratio system. The first method flattens the closed loop gain in the low frequency range. However, one-dimensional search of controller coefficients is required. The second method is based on the optimal solution for the case with infinite. In this method, search is unnecessary and the performance equivalent to the optimum controller can always be obtained.

Finally, the validity of the proposed controller is confirmed by numerical simulations and experiments.

目次

第1章 緒言	8
第2章 問題設定と実験装置	10
2.1 問題設定	10
2.2 軸バネを用いた実験装置	13
2.2.1 周波数応答特性	14
2.3 トルクセンサを用いた実験装置	16
第3章 物理モデル	17
3.1 二慣性系の物理モデル	17
3.2 正規化した物理モデル	20
第4章 閉ループ伝達関数と安定条件	23
4.1 閉ループ伝達関数	23
4.2 制御系が安定となる条件	24
第5章 低周波数域で平坦な特性を持つ補償器構成法	26
5.1 駆動側角速度の比例制御における制約 [15]	26
5.2 低周波数域で平坦な特性を持つ補償器構成法	27
第6章 数値探索による最適な補償器の構成	30
第7章 慣性比 ∞ の解析解に基づく補償器構成法	33
7.1 慣性比が十分大きい場合	33
7.2 慣性比が有限の場合	37

第 8 章	数値例・実験による検証	40
8.1	近似が有効な範囲の確認	40
8.2	シミュレーション	41
8.3	軸バネの実験装置における実験	43
8.3.1	ステップおよび正弦波外乱応答実験	45
8.3.2	広帯域外乱応答実験	49
8.4	軸トルクセンサの利用による提案法と等価な補償器の実装	52
8.4.1	等価な補償器の実装	55
8.4.2	軸トルクセンサを追加した実験装置での実験	56
第 9 章	結言	60
	参考文献	63

目 次

2.1	Two-inertia system with low stiffness and high inertia ratio	10
2.2	Closed-loop system	11
2.3	Closed-loop system using T_S feedback	12
2.4	Configuration of experimental apparatus using shaft spring	13
2.5	Experimental system(top view)	14
2.6	Frequency response of \hat{P}	15
2.7	Experiment system using torque sensor(top view)	16
3.1	Model of two-inertia system	17
3.2	Gain characteristics of P_{22}	19
3.3	Closed-loop system using \bar{P}	22
3.4	Frequency responses of normalized plant \tilde{P}	22
5.1	Closed-loop gain each $\tilde{\chi}$	29
6.1	Plot of G_{cl} each r	31
6.2	Plot of open loop vs G_{cl} vs method1	32
6.3	Plot of r vs optimal \tilde{K}_1, \tilde{K}_2	32
7.1	Plot of $D=0$ ($r = \infty$)	35
7.2	Plot of $D=0$ ($r = 1, 5, 10, 20$)	38
8.1	Numerical examples of K_{ω_M} and $K_{prop1}, K_{prop2}, K_{\infty}$	42
8.2	Simulation result	42
8.3	Closed-loop gain calculated using P of K_{ω_M} and $K_{prop1}, K_{prop2}, K_{\infty}$	44
8.4	Plot of T_L	46

8.5	Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{ω_M}	46
8.6	Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{prop1}	47
8.7	Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{prop2}	47
8.8	Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{∞}	48
8.9	Closed-loop gain(K_{ω_M})	50
8.10	Closed-loop gain(K_{prop1})	50
8.11	Closed-loop gain(K_{prop2})	51
8.12	Closed-loop gain(K_{∞})	51
8.13	Frequency response of \hat{P}_{T_S}	54
8.14	Compare closed-loop gain with each $\frac{1}{2\pi\epsilon}$	57
8.15	Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{prop2}	57
8.16	Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{T_S} (Incomplete differential cutoff frequency 500 Hz)	58
8.17	Plot of T_M recorded in Fig. 8.16	58
8.18	Open-loop transfer function for each controllers	59

表 目 次

2.1	Experimental equipments	13
2.2	Experimental equipments using torque sensor	16
3.1	Physical parameter	19
3.2	Normalized physical parameter	21
8.1	Comparison of closed-loop \mathcal{H}_∞ norm γ	40
8.2	Parameter of controller	41
8.3	Parameter of controller	43
8.4	Physical parameter of \hat{P}_{T_S}	53
8.5	Parameter of controller	56

第1章 緒言

産業用機械の駆動装置として広く用いられている汎用サーボモータには、様々な制御対象に対して、できるだけ簡便な方法で良い制御性能を達成するために、従来経験的に広く用いられているノッチフィルタやPID制御則に、慣性や摩擦の推定機構を組合せ、物理パラメータの推定、ノッチの周波数や補償器のゲインの自動調整の機能を持つものがある [1, 2, 3]. しかし、低剛性・高慣性比の二慣性系など、良い制御性能を得ることが難しい制御対象は存在する. このような制御対象に対して、 H_∞ 制御等のロバスト制御系設計を行えば、与えられた制御対象の情報に基づき、 H_∞ ノルム等の意味で最適な補償器を得ることができるが、そのような設計アルゴリズムを汎用サーボシステムに実装することは実用上困難である.

本研究では、典型的な問題設定毎に、良い性能が達成でき、かつ調整が容易な補償器構造を提案することを目指す. そのために、制御対象のパラメータは既知で補償器の設定に利用できることとし、それらに陽に依存することで再調整が容易な補償器構造を考える. 本稿では、低剛性かつ高慣性比 (10 倍以上) の二慣性系において、従動側慣性の回転速度を一定に保つ外乱抑制制御問題を取り扱う. これまで二慣性系の制御法として様々な方法が研究されているが、それらの多くは慣性比が高くない場合を想定しており [4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20], 本研究のように慣性比 10 倍以上を対象とする研究は少ない. 一例として先行研究 [15] では、駆動側角速度の比例制御による制約を緩和し外乱抑制制御性能を改善するために、 H_∞ 制御系設計で得られる不安定な補償器の特徴を持つ 2 次の補償器の構造とパラメータの調整則が提案されている. これに対して本研究では、従動側角速度の情報も利用できる場合を考える.

本研究のように、より良い性能を得るために従動側角速度や軸トルク等、追加フィードバックを制御系に実装する研究も多く行われている [5, 8, 16, 17, 18]. それらは駆動側角速度情報と組み合わせることによって、互いに等価に変換できる組み合わせが存在することも知られている. そのような場合においても、補償器の構成によっては閉ループ系が不安定化することもあれば、安定であっても追加フィードバックを実装する以前よりも外乱抑制性能が良くなるとは限らない. これに対して、従来研究では極配

置法と呼ばれる，閉ループ伝達関数の極を任意に配置する設計法が多く行われているが [8, 16, 18]，極配置法に外乱抑制の意味で最適となる保証を与えている研究は筆者の知る限りはない．すなわち，本研究のように追加フィードバックを利用した外乱抑制の意味で最適な補償器を目的とする問題設定はこれまでに扱われていない．

本稿では簡単のため，駆動側及び従動側速度に定数ゲインがかかる比例補償器を扱う．本論文の構成は次の通りである．第2章で本研究で扱う実験装置と問題設定を述べる．第3章で実験装置の物理モデルについて述べた後，従来研究 [15] と同様に正規化した物理モデルを与える．第4章で提案する補償器を用いた閉ループ系の伝達関数を導出したのち，制御系が安定となるための可調整パラメータの条件を示す．そののち，第5章と第7章で2つの補償器構成法を提案する．まず第5章で従来研究 [15] で与えられた従動側角速度のみの比例制御における制約を述べ，低周波数域で平坦なゲイン特性を持つ補償器の構成法を提案する．つぎに第6章で慣性比に対して二つの比例ゲインを数値的に探索した結果を示し，第7章で導出する \mathcal{H}_∞ 補償器を動機づける．第7章で慣性比無限大に対する \mathcal{H}_∞ 補償器の解析解を導出し，この結果を利用して次に，慣性比が有限の場合に対してある近似の下で \mathcal{H}_∞ 補償器とほぼ同等の外乱抑制性能を一意に達成する補償器を提案する．第8章において，第7章で用いた近似の妥当性を数値例により確認したのち，シミュレーションと実験により提案法の実用性の検証を行う．最後に第9章でまとめる．

第2章 問題設定と実験装置

本章では、まず、外乱抑制制御系の補償器設計について問題設定を述べる。次に、本研究で扱う2種類の実験装置について述べる。2種類の装置を用いる理由は、先に軸バネを用いた実験装置を製作し、以降に述べるように後にトルクセンサを追加した装置に改良したためである。

2.1 問題設定

近年、サーボモータ駆動系は、小型化や軽量化・高速化の需要にこたえるべく、剛性の低下やモータ回転子の低慣性化が進んでいる。しかし、求められる作業は変わらないことから、負荷側はモータ回転子に比べて低慣性化されにくい。その結果として、慣性比というモータ回転子に対する負荷の慣性モーメント比が大きくなり、Fig. 2.1に示すような低剛性・高慣性比の二慣性ねじり振動系の制御が求められる傾向がある。しかし、汎用サーボモータではそのカタログ(例えば[11])に記載されているように慣性比が大きくなるほど、応答性が悪くなるとされており、十分な制御性能が得られるとは限らない。また、6章で示すように、慣性比の増加によって外乱トルクの影響を受けやすくなる。よって、この問題を解決するために本論文では低剛性・高慣性比の二慣性系の外乱抑制性能の改善を目的とする。高慣性

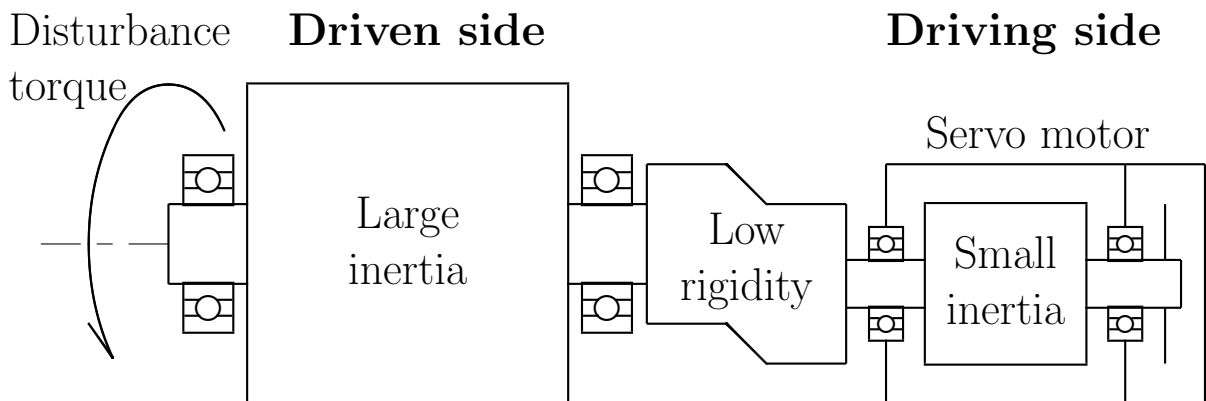


Fig. 2.1: Two-inertia system with low stiffness and high inertia ratio

比の基準について，サーボモータのカタログ [11] に記載されている許容負荷慣性モーメントの多くが 10 倍～30 倍に設定されているため，本論文では約 10 倍以上を高慣性比と定義する．

閉ループ系を Fig. 2.2 のように表す．Fig. 2.1 と対応した制御対象 \hat{P} と補償器 K によって構成される． \hat{P} は，入力 $u := \begin{bmatrix} T_L & T_M \end{bmatrix}^T$ から出力 $y := \begin{bmatrix} \omega_L & \omega_M \end{bmatrix}^T$ までの伝達関数行列である．ここで， $\hat{P}_{ab}(s)$ を b から a までの伝達関数とし， $a = 1, 2$ がそれぞれ ω_L, ω_M に， $b = 1, 2$ がそれぞれ T_L, T_M に対応するとして次式のように表す．

$$\hat{P}(s) := \begin{bmatrix} \hat{P}_{11}(s) & \hat{P}_{12}(s) \\ \hat{P}_{21}(s) & \hat{P}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

システムの制御目的は従動側慣性に働く外乱トルク T_L に対して，駆動側モータで適当なトルク T_M を与えることによって，従動側慣性の速度 ω_L を一定に保つことである． T_M は駆動側モータの速度 ω_M と従動側モータの速度 ω_L を計測することによって生成される．すなわち， ω_M および ω_L と T_M はそれぞれ設計される補償器 K の入力と出力である．ここで， K は次式のように構成される．

$$K := \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

K_1, K_2 はそれぞれ ω_L, ω_M にかかる比例ゲインである．すなわち，次式が成り立つ．

$$T_M = K y = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_M \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

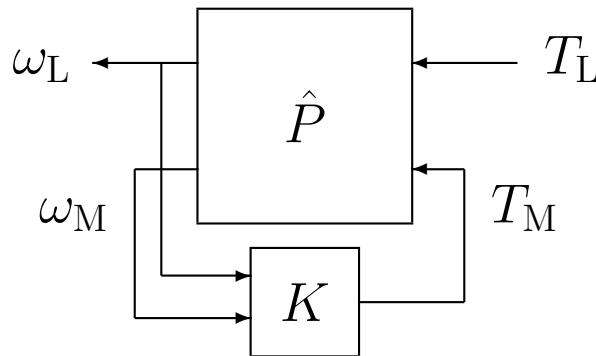


Fig. 2.2: Closed-loop system

以上より本研究では、次の外乱抑制問題を考える。

外乱抑制問題 以下の条件を満足しかつ、 γ を最小化する補償器 $K(s)$ を求めよ。

1. Fig. 2.2 の閉ループ系が内部安定
2. $\|G_{cl}\|_{\infty} < \gamma$

ただし、 G_{cl} は T_L から ω_L までの閉ループ伝達関数である。

上記の問題では従動側の慣性負荷における外乱抑制性能のみが評価されており、駆動側モータに関する制約は課されていない。よって、負荷の振動を抑制するために、駆動側モータが激しく振動するような状況が許される問題設定となっていることに注意されたい。二慣性ねじり振動系に対して多くの研究が報告されているが、(例えば [13, 14]) 上記の点が従来研究と異なる。

また、1章で述べたように、従動側にセンサを追加することが難しいような制御対象に対しても、軸トルクセンサを追加し、軸トルクの微分を利用することによって等価な制御系を構成することが出来ることが知られている [8]。8.4節では Fig. 2.3 に示すような、観測状態として軸トルク T_S を追加した制御対象 \hat{P}_{T_S} と、 T_S の微分および ω_M より T_M を計算する補償器 K_{T_S} で構成された閉ループ系について、Fig. 2.2 と同等の制御性能を達成することを検討する。

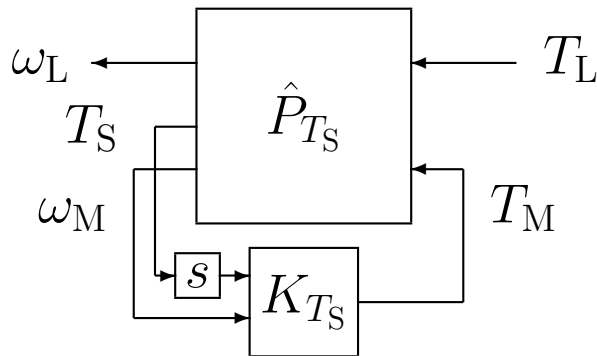


Fig. 2.3: Closed-loop system using T_S feedback

2.2 軸バネを用いた実験装置

軸バネを用いた実験装置の概要を Fig. 2.4, 実際の外観を Fig. 2.5, 装置諸元を Table 2.1 に示す.

ほぼ同じ仕様の2つの AC サーボモータが, 軸バネを用いた柔軟カップリングを介してサーボモータ回転子の約10倍の慣性負荷ディスクに接続されている. 具体的な物理パラメータは 3章で述べる. 両側

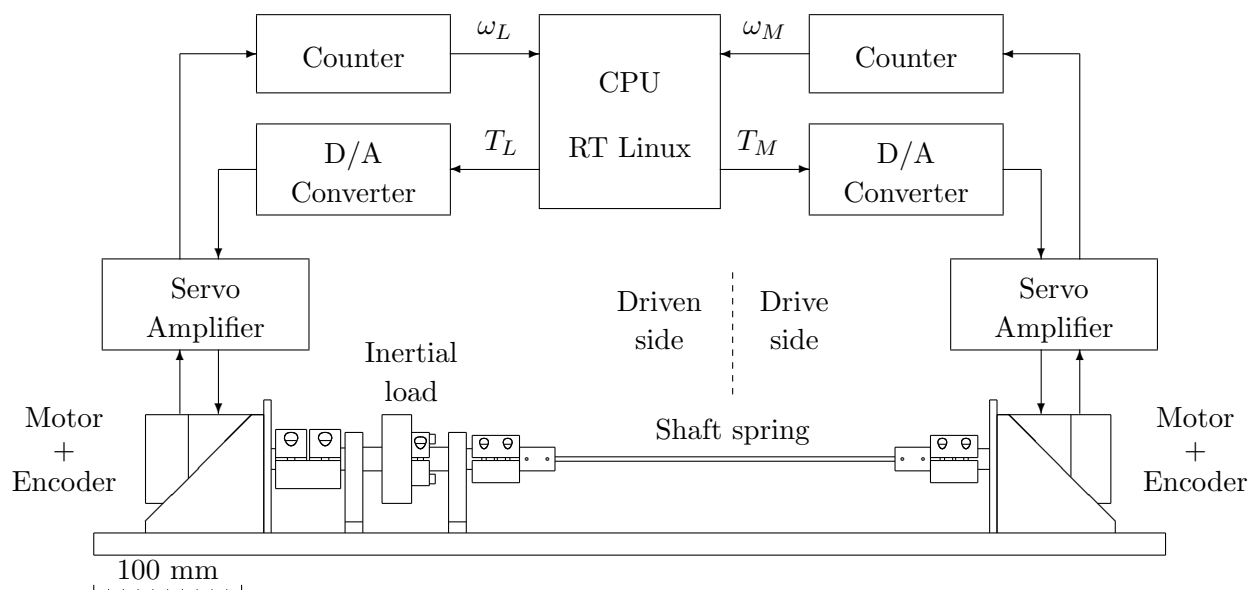


Fig. 2.4: Configuration of experimental apparatus using shaft spring

Table 2.1: Experimental equipments

PC	Dell Dimension 2100 / Fedora Core 1 (RTLinux 3.2-pre3, Linux kernel 2.4.22)
D/A	CONTEC DA12-4(PCI) (12bit, 10 μ s)
counter	CONTEC CNT24-4(PCI)H (24bit, 1MHz)
PIO	CONTEC PIO-32/32T(PCI) (Parallel input output, 32bit 200ns)
Driving motor	YASKAWA ELECTRIC CORPORATION SGMAV-02ADA21, SGD1V-1R6A01A (rated power: 200 W, rated torque: 0.637 Nm(max 1.91 Nm), rotor inertia moment: 0.116 $\times 10^{-4}$ kg \cdot m ²), speed/position detector: 20-bit encoder
Driven motor	MITSUBISHI ELECTRIC CORPORATION HF-MP23, MR-J3-20A (rated power: 200 W, rated torque: 0.64 Nm(max 1.9 Nm), rotor inertia moment: 0.088 $\times 10^{-4}$ kg \cdot m ²), speed/position detector: 18-bit encoder
Inertial load	ϕ 60 mm \times T 20 mm, material: SS400
Shaft spring	ϕ 3 mm \times L 230 mm (The shaft is 250 mm long.) material: SUS304

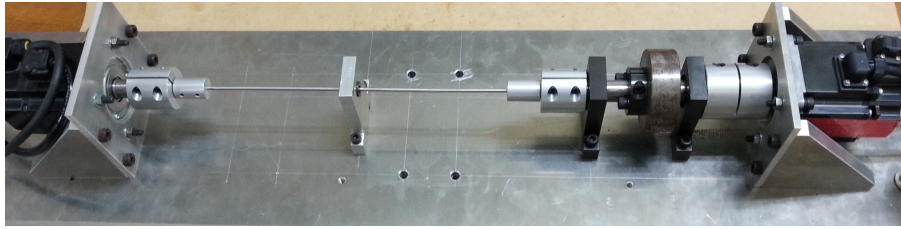


Fig. 2.5: Experimental system(top view)

のサーボモータのアンプはトルク制御モードに設定する．実験時はパソコンから D/A 変換器を介して各サーボアンプへアナログ電圧指令を送り，その指令に従って各サーボアンプが各モータをトルク T_M ， T_L で駆動させる．各モータに取り付けられたロータリエンコーダの信号は各サーボアンプを介して 1 回転あたり 65536 パルス出力され，その後，カウンタボードで 4 通倍されてパソコンに読み込まれる．そのカウント値をサンプリング周期 (周波数応答実験：0.20 ms，制御実験：0.25 ms) で擬似微分して各モータの回転速度 ω_M ， T_L を得る．制御プログラムは RTLinux で実行される．

Fig. 2.5 を見ると，装置の両側にサーボモータが設置され，その間に細い金属軸が固定されているのが分かる．ただし，Fig. 2.4 と左右の対応が逆になっており，左側が駆動側，右側が従動側で，従動側には慣性体が設置されている．

駆動側慣性モーメント J_M ，従動側慣性モーメント J_L ，バネ定数 K_S と共振周波数 f_n ，反共振周波数 f_a の関係は次式で与えられる．

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right) K_S} \quad (2.4)$$

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_S}{J_L}} \quad (2.5)$$

2.2.1 周波数応答特性

軸バネの実験装置に対して周波数応答実験を行って， \hat{P} の周波数応答を取得する． $T_M(t) \equiv 0$ ， $T_L(t)$ として正弦波信号を入力し， \hat{P}_{11} と \hat{P}_{12} の周波数応答を， $T_L(t) \equiv 0$ ， $T_M(t)$ として正弦波信号を入力し， \hat{P}_{21} と \hat{P}_{22} の周波数応答を Fig. 2.6 のように得る． \hat{P}_{22} の応答を見ると，

- 1つの共振と1つの反共振を持つこと，
- 共振周波数が約 324 rad/s(約 51.6 Hz) と低いこと，

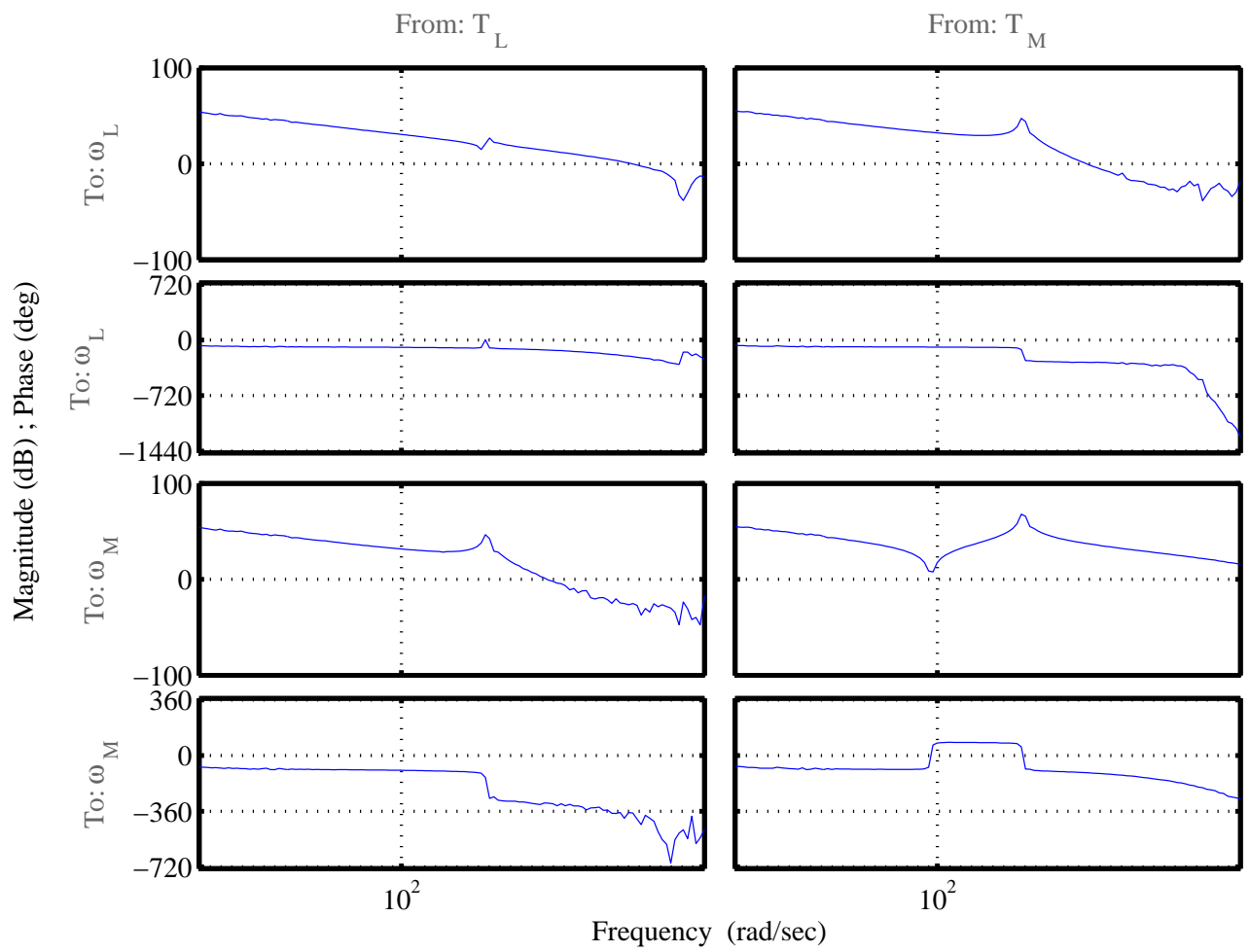


Fig. 2.6: Frequency response of \hat{P}

- 共振周波数と反共振周波数が離れていること

といった低剛性・高慣性比の二慣性系の特徴が確認できる。

2.3 トルクセンサを用いた実験装置

トルクセンサを用いた装置の概要に示す。この装置は 8.4 節において、駆動側角速度の代わりに軸トルクを微分フィードバックする補償器の実装の検討に用いる。Fig. 2.4 との主な違いは、トルクセンサが駆動側に追加され、またそれを読み込むために A/D 変換ボードを追加したことである。本節では外観を Fig. 2.7, 装置緒元を Table 2.2 に示すのみとし、物理パラメータ並びに周波数応答については Table 8.4 で述べる。

装置は Fig. 2.7 に示すように、両端にサーボモータが設置されており、向かって左側が駆動側、右側が従動側となる。また駆動側のサーボモータのすぐとなりにある、金色の軸が通る灰色の直方体がトルクセンサである。それぞれの詳細については Table 2.2 に示す。



Fig. 2.7: Experiment system using torque sensor(top view)

Table 2.2: Experimental equipments using torque sensor

PC	Dell Dimension 2100 / Fedora Core 1 (RTLinux 3.2-pre3, Linux kernel 2.4.22)
D/A	CONTEC DA12-4(PCI) (12bit, 10 μ s)
counter	CONTEC CNT24-4(PCI)H (24bit, 1MHz)
PIO	CONTEC PIO-32/32T(PCI) (Parallel input output, 32bit 200ns)
A/D	CONTEC AD12-16(PCI) (12bit, \pm 5V 10 μ s)
Driving motor	YASKAWA ELECTRIC CORPORATION SGD7S-1R6A00A, SGM7J-02AFA21 (rated power: 200 W, rated torque: 0.637 Nm(max 2.23 Nm), rotor inertia moment: 0.263×10^{-4} kg \cdot m ²), speed/position detector: 20-bit encoder
Driven motor	YASKAWA ELECTRIC CORPORATION SGD7S-1R6A00A, SGM7J-02AFA21 (rated power: 200 W, rated torque: 0.637 Nm(max 2.23 Nm), rotor inertia moment: 0.263×10^{-4} kg \cdot m ²), speed/position detector: 20-bit encoder
Shaft spring	ϕ 3 mm \times L 230 mm (The shaft is 250 mm long.) material: SUS304
Dynamic torque meter	UTMII -20Nm (Max torque range: \pm 20N \cdot m, Max output voltage: \pm 5vDC))
Inertial load	ϕ 60 mm \times T 13 mm, ϕ 80 mm \times T 20 mm material: SS400

第3章 物理モデル

本章では、まず二慣性系の物理モデルについて述べる。次に、先行研究 [15] と同様に正規化した物理モデルを与える。本論文では以下、5章と7章で外乱抑制性能を改善する補償器の構成法を与える。その際の議論が容易となるように本章では、主に慣性比に関して適当な正規化を施すことにより、一般性を失うことなくパラメータの数を減らした簡単な物理モデルの表現を導出しておく。

3.1 二慣性系の物理モデル

Fig. 3.1 のような二慣性系を考える。二慣性系の運動方程式は次式で与えられる。

$$J_M \dot{\omega}_M = T_M - T_S \quad (3.1)$$

$$T_S = K_S \theta_r + C_S (\omega_M - \omega_L) \quad (3.2)$$

$$J_L \dot{\omega}_L = T_L + T_S - C_L \omega_L \quad (3.3)$$

ただし、 T_S は軸のねじりトルク、 θ_r は両慣性の相対角度（軸のねじれ角）、 J_M は駆動側慣性モーメント、 J_L は従動側慣性モーメント、 K_S は軸のねじりバネ定数、 C_S は軸の減衰係数、 C_L は従動側の減衰係数である。

システム P の状態を $x := \begin{bmatrix} \theta_r & \omega_M & \omega_L \end{bmatrix}^T$ ，入力を $u := \begin{bmatrix} T_L & T_M \end{bmatrix}^T$ ，出力を $y := \begin{bmatrix} \omega_L & \omega_M \end{bmatrix}^T$

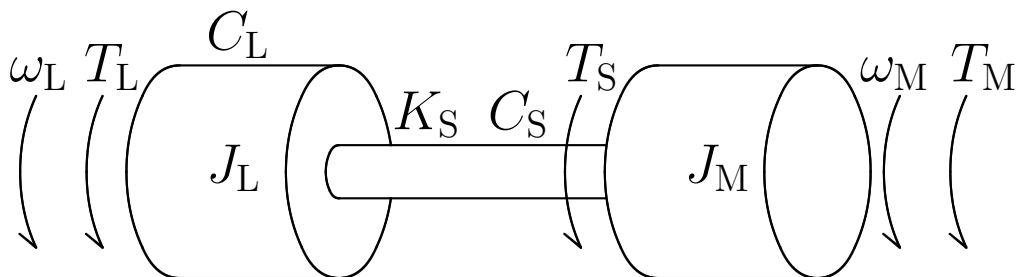


Fig. 3.1: Model of two-inertia system

とおくと，この状態空間表現は次のように与えられる．

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (3.4)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_S}{J_M} & -\frac{C_S}{J_M} & \frac{C_S}{J_M} & 0 & \frac{1}{J_M} \\ \frac{K_S}{J_L} & \frac{C_S}{J_L} & -\frac{C_S + C_L}{J_L} & \frac{1}{J_L} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.5)$$

また，システムの伝達関数行列は次式で与えられる [10]．

$$P(s) := \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} J_M s^2 + C_S s + K_S & C_S s + K_S \\ C_S s + K_S & J_L s^2 + (C_S + C_L)s + K_S \end{bmatrix}}{sJ(\bar{J}s^2 + C_S s + K_S) + C_L(J_M s^2 + C_S s + K_S)}, \quad (3.6)$$

$$J := J_M + J_L, \quad \bar{J} := \frac{J_M J_L}{J_M + J_L}$$

ここで， $P_{22}(s)$ の共振角周波数 ω_n と反共振角周波数 ω_a はそれぞれ次式で与えられる．

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L} \right) K_S} \quad (3.7)$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K_S}{J_L}} \quad (3.8)$$

さらに，(3.6) 式より P_{22} の周波数特性における共振後 -20 dB/dec の傾きとなるゲインと共振・反共振時のゲインの近似値を Fig. 3.2 のように求めることができる．この関係を使って，軸バネを用いた実験装置の物理パラメータを周波数応答実験の結果の \hat{P}_{22} からモデル化誤差ができるだけ小さくなるように次のように決定した．

1. 共振後に -20 dB/dec の傾きとなるゲインに注目し，試行錯誤で J_M をゲインの差が小さくなるように調整する．

2. ω_n と ω_a を実験結果から読み取り, K_S と J_L を次式で求める.

$$K_S = J_M(\omega_n^2 - \omega_a^2), \quad J_L = \frac{K_S}{\omega_a^2} \quad (3.9)$$

3. 共振時のゲインに注目し, 試行錯誤で C_S をゲインの差が小さくなるように調整する.

4. 反共振時のゲインに注目し, 試行錯誤で C_L をゲインの差が小さくなるように調整する.

結果を Table 3.1 に示す. このときの物理モデルのゲイン特性を Fig. 3.2 の黒線に, Fig. 2.6 の \hat{P}_{22} (実験結果) を赤線に示す.

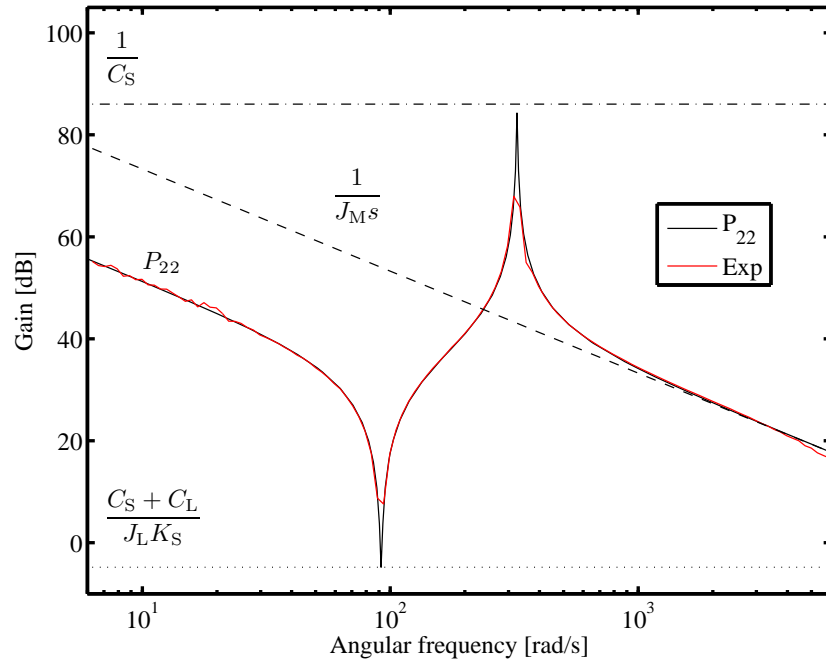


Fig. 3.2: Gain characteristics of P_{22}

Table 3.1: Physical parameter

J_M	$2.17 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
J_L	$2.49 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
K_S	$2.10 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$
C_S	$5.0 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
C_L	$2.5 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
ω_n	324 rad/s (51.6 Hz)
ω_a	91.7 rad/s (14.6 Hz)

3.2 正規化した物理モデル

システムのできるだけ簡単な表現を導出する．システムの状態を角運動量の意味で平均的な角速度 ω_{ave} ，相対角度 θ_r ，相対速度 $\dot{\theta}_r$ とおく．このとき， ω_{ave} は角運動量の意味で平均であるため， $\frac{\omega_M + \omega_L}{2}$ ではないことに注意する． $\bar{x} := \begin{bmatrix} \omega_{\text{ave}} & \theta_r & -\dot{\theta}_r \end{bmatrix}^T$ とおき，システムの入力を $\bar{u} := \begin{bmatrix} \frac{T_L}{J_L} & \frac{T_M}{J_M} \end{bmatrix}^T$ と改め，正則行列 T を

$$T := \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha := \frac{1}{1+r}, \quad r := \frac{J_L}{J_M} \quad (3.10)$$

とおき，相似変換されたシステムの状態を \bar{x} とおくと，これは次式で与えられる．

$$\bar{x} = Tx = \begin{bmatrix} \alpha\omega_M + (1-\alpha)\omega_L \\ \theta_r \\ \omega_L - \omega_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\text{ave}} \\ \theta_r \\ -\dot{\theta}_r \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

さらに， C_L は $P_{22}(s)$ の反共振のノッチの深さと低角周波数域のゲインに変化を与えるのみで，本論文の主張に影響を与えないため $C_L = 0$ とすると， \bar{u} から y までのシステム \bar{P} の状態空間表現が次式で与えられる．

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u}, \quad y = \bar{C}\bar{x} \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_n^2 & -2\xi\omega_n & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$2\xi\omega_n := \left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L} \right) C_S$$

本論文では慣性比 r が大きい場合 ($r \geq 10$) を扱う。また、システムの伝達関数行列は次式で与えられる。

$$\bar{P}(s) := \begin{bmatrix} \bar{P}_{11}(s) & \bar{P}_{12}(s) \\ \bar{P}_{21}(s) & \bar{P}_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + (1 - \alpha)(2\xi\omega_n s + \omega_n^2) & \alpha(2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \\ (1 - \alpha)(2\xi\omega_n s + \omega_n^2) & s^2 + \alpha(2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \end{bmatrix}}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3.14)$$

このとき、 ω_n と ω_a の関係は α を用いて次式のように表せる。

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{\alpha} \quad (3.15)$$

Table 3.1 の各パラメータについて正規化後のパラメータを Table 3.2 に示す。これに対応する補償器 \bar{K} は、出力が $\frac{1}{J_M}$ 倍されることに注意して、

$$\bar{K} = \frac{K}{J_M} \quad (3.16)$$

となる。

以降では簡単のため、 $\omega_n = 1$ の場合を考えるが、 $\omega_n \neq 1$ の場合も同様に議論できる。また、本論文ではねじり剛性が低い制御対象を考えるため、以降では簡単のため $\xi = 0$ と仮定する。そのときの制御対象 $\tilde{P}(s)$ は (3.17) 式となる。

$$\bar{P}(s)|_{\xi=0} = \tilde{P}(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + (1 - \alpha) & \alpha \\ 1 - \alpha & s^2 + \alpha \end{bmatrix}}{s(s^2 + 1)} \quad (3.17)$$

\tilde{P} と対応する補償器 \tilde{K} を用いると、Fig. 2.2 は Fig. 3.3 に示すような閉ループ系となる。 $\tilde{P}(s)$ の周波数応答を Fig. 3.4 に示す。 $\xi = 0$ と仮定したため、共振周波数ではゲインが無限大となり、反共振周波数ではゲインが 0 となる。現実の装置では $\xi \neq 0$ であり、この状況は現実には起こらないが、8 章に示す実験で実際に $\xi \neq 0$ ($\xi \ll 1$) の装置を扱い、提案型補償器が使用できることを確認している。

Table 3.2: Normalized physical parameter

r	11.5
α	0.0801
ξ	0.0039

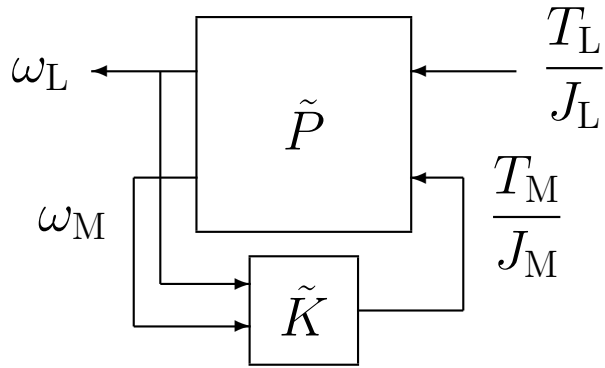


Fig. 3.3: Closed-loop system using \tilde{P}

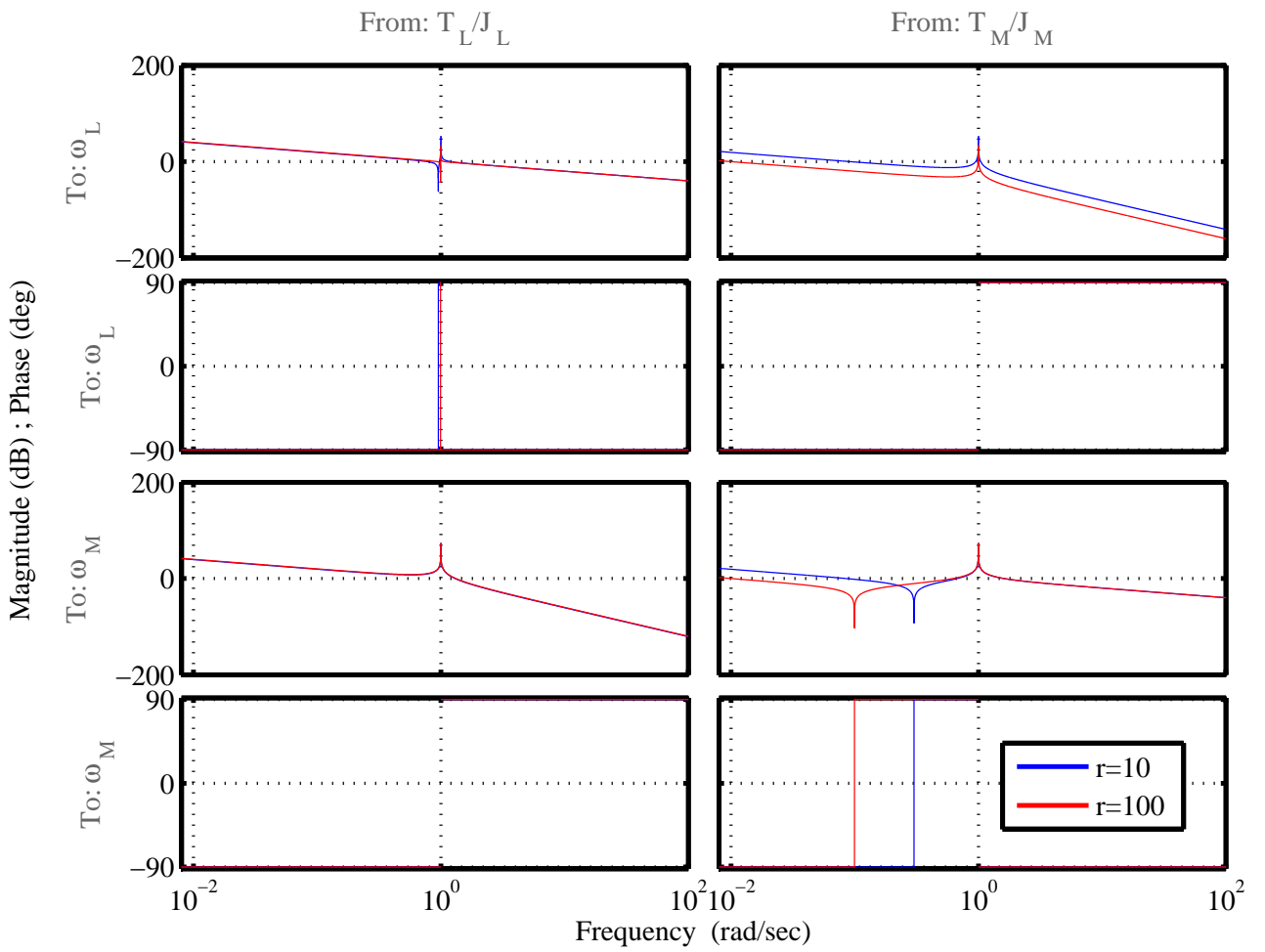


Fig. 3.4: Frequency responses of normalized plant \tilde{P}

第4章 閉ループ伝達関数と安定条件

本章では Fig. 3.3 の制御系の閉ループ伝達関数について導出したのちに、それが安定となるための可調整パラメータ \tilde{K}_1 , \tilde{K}_2 に関する条件を示す.

4.1 閉ループ伝達関数

Fig. 3.3 の閉ループ伝達関数 G_{cl} は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} G_{cl} &= \tilde{P}_{11} \frac{1 - \tilde{P}_{22}\tilde{K}_2}{1 - \tilde{P}_{12}\tilde{K}_1 - \tilde{P}_{22}\tilde{K}_2} + \frac{\tilde{P}_{12}\tilde{P}_{21}\tilde{K}_2}{1 - \tilde{P}_{12}\tilde{K}_1 - \tilde{P}_{22}\tilde{K}_2} = \tilde{P}_{11} \frac{1 - \left(\tilde{P}_{22} + \frac{\tilde{P}_{12}\tilde{P}_{21}}{\tilde{P}_{11}} \right) \tilde{K}_2}{1 - \tilde{P}_{12}\tilde{K}_1 - \tilde{P}_{22}\tilde{K}_2} \\ &= \frac{\tilde{P}_{11} - \tilde{P}_{11}\tilde{P}_{22}\tilde{K}_2 + \tilde{P}_{12}\tilde{P}_{21}\tilde{K}_2}{1 - \tilde{P}_{12}\tilde{K}_1 - \tilde{P}_{22}\tilde{K}_2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

(3.17) 式を代入すると (4.2) 式で与えられる.

$$G_{cl} = \frac{s^2 - \tilde{K}_2 s + (1 - \alpha)}{s^3 - \tilde{K}_2 s^2 + s - \alpha \tilde{\chi}} \quad (4.2)$$

$$\tilde{\chi} = \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 \quad (4.3)$$

ここで, $\tilde{\chi}$ は \tilde{K}_1 と \tilde{K}_2 の和である. これを指定することは (4.2) 式より直流ゲイン $G_{cl}(0) = -\frac{1-\alpha}{\alpha\tilde{\chi}}$ を指定することを意味し, 本研究では重要なパラメータである.

また, 前章で述べたように, (4.2) 式で簡単のため, $\omega_n = 1$ の場合を考えているが, $\omega_n \neq 1$ の場合 (すなわち \bar{P}) も同様に議論できる. その場合は,

$$\bar{K} = \tilde{K} \omega_n \quad (4.4)$$

とすればよい.

本節は以後その理由を示す. \bar{P} と \bar{K} で構成される閉ループ伝達関数は $\xi = 0$ と仮定すると (4.2) 式と

同様に

$$G_{\text{cl}}|_{\xi=0} = \frac{s^2 - \bar{K}_2\omega_n s + (1-\alpha)\omega_n^2}{s^3 - \bar{K}_2\omega_n s^2 + \omega_n^2 s - \alpha\bar{\chi}\omega_n^2} \quad (4.5)$$

となる. $s = j\omega$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned} G_{\text{cl}}|_{s=j\omega, \xi=0} &= \frac{(j\omega)^2 - \bar{K}_2\omega_n(j\omega) + (1-\alpha)\omega_n^2}{(j\omega)^3 - \bar{K}_2\omega_n(j\omega)^2 + \omega_n^2(j\omega) - \alpha\bar{\chi}\omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2 \left(\left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \frac{\bar{K}_2}{\omega_n} \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + (1-\alpha) \right)}{\omega_n^3 \left(\left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^3 - \frac{\bar{K}_2}{\omega_n} \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right) - \alpha\frac{\bar{\chi}}{\omega_n} \right)} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \frac{\bar{K}_2}{\omega_n} \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + (1-\alpha)}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^3 - \frac{\bar{K}_2}{\omega_n} \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right) - \alpha\frac{\bar{\chi}}{\omega_n}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる. (4.6) 式から, 閉ループ伝達関数の周波数特性を ω_n で正規化できることが分かり, 正規化の前と後の補償器の関係が (4.4) 式となる.

4.2 制御系が安定となる条件

閉ループ系が安定となるための $\bar{\chi}$, \bar{K}_2 に関する条件をフルビッツの安定判別により導出する. \bar{K}_1 については, $\bar{\chi}$ と \bar{K}_2 が決まることによって定まるため, 本節では \bar{K}_1 ではなく $\bar{\chi}$ についての安定条件を扱う. 次の結果が成り立つ.

補題 4.1 閉ループ系が安定となるための必要十分条件は次式が成り立つことである.

$$0 > \alpha\bar{\chi} > \bar{K}_2 \quad (4.7)$$

証明

$$1 - \tilde{P}_{12}(s)\tilde{K}_1 - \tilde{P}_{22}(s)\tilde{K}_2 = 1 - \frac{\alpha}{s(s^2+1)}\tilde{K}_1 - \frac{s^2+\alpha}{s(s^2+1)}\tilde{K}_2 = 0 \quad (4.8)$$

より，閉ループ系の特性方程式は

$$s^3 - \tilde{K}_2 s^2 + s - \alpha(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2) = s^3 - \tilde{K}_2 s^2 + s - \alpha\tilde{\chi} = 0 \quad (4.9)$$

となる．特性多項式の全ての係数が正となるために， $\tilde{\chi}$ と \tilde{K}_2 は

$$0 > \tilde{\chi}, \quad 0 > \tilde{K}_2 \quad (4.10)$$

である必要がある．行列 H_2 を

$$H_2 = \begin{bmatrix} -\tilde{K}_2 & -\alpha\tilde{\chi} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

とおくとフルビッツの安定判別より，閉ループ系が安定となるための必要十分条件は，

$$|H_2| = -\tilde{K}_2 + \alpha\tilde{\chi} > 0 \quad (4.12)$$

が成り立つことである．移項して

$$\alpha\tilde{\chi} > \tilde{K}_2 \quad (4.13)$$

より， $|H_2| > 0$ と (4.10) 式の両方を満たすのは (4.7) 式となる．したがって，閉ループ系が安定となるための必要十分条件は (4.7) 式が成り立つことである． \square

本章では $\omega_n = 1$ の場合について記載したが， $\omega_n \neq 1$ の場合においても，前節で示すように \tilde{K}_1 と \tilde{K}_2 をそれぞれ ω_n 倍するだけであるため，結果的に ω_n は各辺で約分されて安定条件は (4.7) 式になる．したがって， α が唯一安定条件にかかわる物理パラメータとなり， ω_n には依存しない．

また， \tilde{K} の中身は比例定数のみであるため，位相特性を持たない．よって， $\frac{T_M}{J_M}$ で閉ループ系を切り開くと， \tilde{P}_{12} と \tilde{P}_{22} は位相が最大 90 度までしか遅れないため，一巡伝達関数は位相余裕 90 度，ゲイン余裕無限大となる．補償器によっては，性能を改善することとロバスト安定性がトレードオフの関係になるが (たとえば [15])，本研究で対象とする補償器構造ではそうならない．

第5章 低周波数域で平坦な特性を持つ補償器構成法

本章では、まず $\tilde{K}_1 = 0$ として駆動側角速度のみを利用する比例制御における制約 [15] について述べる。次に、その制約において特別な角周波数におけるゲインを、従動側角速度を利用することで変化できることに基づいた補償器構成法を示す。

5.1 駆動側角速度の比例制御における制約 [15]

$\tilde{K}_1 = 0$ の場合、(4.1) 式より閉ループ伝達関数 G_{cl} は以下で与えられる。

$$G_{cl} = \tilde{P}_{11} \frac{1 - c\tilde{K}_2}{1 - \tilde{P}_{22}\tilde{K}_2}, \quad c := \tilde{P}_{22} - \frac{\tilde{P}_{12}\tilde{P}_{21}}{\tilde{P}_{11}} \quad (5.1)$$

補題 5.1 閉ループ伝達関数 G_{cl} を (5.1) 式で与える。このとき、

$$\omega^* = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)}}{2}} \simeq \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \quad (5.2)$$

与えられる角周波数 $\omega = \omega^*$ において、次式が成り立つ。

$$|G_{cl}(j\omega^*)| = \left| \tilde{P}_{11}(j\omega^*) \right| = \frac{(1 - \alpha) - \omega^{*2}}{\omega^*(1 - \omega^{*2})} \quad (5.3)$$

すなわち、特別な角周波数 ω^* が存在し、その角周波数における閉ループゲインは、 \tilde{K}_2 によらず開ループゲインに一致する。これが駆動側角速度のみをフィードバックする比例制御における制約を与える。従来研究 [15] では、(5.3) 式が成り立つ理由が、 $\omega = \omega^*$ において c と \tilde{P}_{22} が複素共役の関係となり、 $\frac{1 - c\tilde{K}_2}{1 - \tilde{P}_{22}\tilde{K}_2}$ の絶対値が \tilde{K}_2 によらず 1 であることが示されている。その上で、比例補償器よりも大きな位相進みを持つ不安定な補償器構造を提案し、実際に外乱抑制性能が改善できることを示している。

実際、 \mathcal{H}_∞ ノルムの下限を与える \tilde{K}_2 (これを \tilde{K}_2^* と表す) は閉ループ伝達関数の直流ゲインと $\omega = \omega^*$

でのゲインを等しくするものとして次式

$$\tilde{K}_2^* = -\frac{(1-\alpha)\omega^*(1-\omega^*)}{\alpha(1-\alpha^{*2})} \simeq -\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \quad (5.4)$$

で与えられ、このとき ω^* より低い周波数域では平坦なゲイン特性が達成される。次節では、このゲイン特性に着目した設計法を提案する。

5.2 低周波数域で平坦な特性を持つ補償器構成法

本章では閉ループ伝達関数の直流ゲインと $\omega = \omega^*$ におけるゲインを等しくすることで、その二点の間をほぼ平坦とする補償器 K を導出し、それに基づき補償器の係数を設定する手法を提案する。

前節において、駆動側角速度の比例制御における制約を示したが、 $\tilde{K}_1 \neq 0$ の場合には、(5.1) 式と異なり (4.1) 式の分母には \tilde{K}_1 が含まれるため、前述した c と \tilde{P}_{22} は複素共役とならない。よって、 ω^* におけるゲインを開ループゲインよりも小さくすることが出来る。また、(4.2) 式より、 $\tilde{\chi}$ が直流ゲインを定めるパラメータであることから、 \tilde{K}_1 と \tilde{K}_2 の合計を一定値に維持しつつその内訳を変えることによって、直流ゲインを一定にしたまま閉ループゲインの概形の変更が可能である。以上より、 $|G_{cl}(0)|$ と $|G_{cl}(j\omega^*)|$ を等しくし、かつ所望のゲインとする \tilde{K} を構成することを考える。 $|G_{cl}(0)|$ と $|G_{cl}(j\omega^*)|$ はそれぞれ以下で与えられる。

$$|G_{cl}(0)| = \frac{1-\alpha}{\alpha\sqrt{\tilde{\chi}^2}} \quad (5.5)$$

$$|G_{cl}(j\omega^*)| = \sqrt{\frac{((1-\alpha)-\omega^{*2})^2 + \tilde{K}_2^2 \omega^{*2}}{(\omega^* - \omega^{*3})^2 + (\tilde{K}_2 \omega^{*2} - \alpha\tilde{\chi})^2}} \quad (5.6)$$

実際に (5.5) 式と (5.6) 式が等しいとすると、二次方程式の解の公式を用いて解 \tilde{K}_2 を求めることができる。具体的には、得られた二つの実数解のうち閉ループ系の安定条件を満たす $\tilde{K}_2 < 0$ に対応する解を選択すると、次式を得る。

$$\tilde{K}_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.7)$$

$$A = \alpha^2 \tilde{\chi}^2 \omega^{*2} - (1-\alpha)^2 \omega^{*4}, \quad B = 2\alpha(1-\alpha)^2 \tilde{\chi} \omega^{*2}$$

$$C = \alpha^2 \tilde{\chi}^2 \left((1 - \alpha - \omega^{*2})^2 - (1 - \alpha)^2 \right) - (1 - \alpha)^2 \omega^{*2} (1 - \omega^{*2})^2$$

よって, (4.3) 式より, \tilde{K}_1 は次のように定まる.

$$\tilde{K}_1 = \tilde{\chi} - \tilde{K}_2 \quad (5.8)$$

Fig. 3.3 に示した K を用いると, 前節で示した最適な駆動側角速度のみを用いる比例制御を適用した場合と同様に, 閉ループ伝達関数のゲイン特性は ω^* よりも低周波数域においてほぼ平坦となる. ただし, ω^* 以上の高周波数域における閉ループゲインについては考慮しておらず, $\tilde{\chi}$ の値により高域でゲインが高くなる可能性がある. 実際に $r = 10$ として数値的な検討を行った結果を Fig. 5.1 に示す. $\tilde{\chi} = \tilde{K}_2^*$ とすると, 直流ゲインが前節の比例制御と等しくなるため, 開ループゲインと ω^* で交差し, それより低域が平坦となる前節で述べたゲイン特性を得る. $\tilde{\chi}$ を \tilde{K}_2^* から減少させていくと (絶対値を大きくしていくと), ある値までは \mathcal{H}_∞ ノルムが低下する. Fig. 5.1 においては $\tilde{\chi} = 1.7\tilde{K}_2^*$ が最適な $\tilde{\chi}$ となる. しかしさらに $\tilde{\chi}$ を減少させていくと, Fig. 5.1 における $\tilde{\chi} = 2.5\tilde{K}_2^*$ のように高周波数域でピークが生じて \mathcal{H}_∞ ノルムが悪化する. (最終的には補題 4.1 の条件を満たさなくなり, 系は不安定化する.) この \mathcal{H}_∞ ノルムが低下する $\tilde{\chi}$ の範囲について, 物理パラメータとの関連を検討する余地は残されているが, ここでは簡単のため, 所望の応答を得るための $\tilde{\chi}$ に関する探索を行う次の調整則を提案する.

構成法 1 以下の (1) から (5) を行う.

- (1) $\tilde{\chi} = \tilde{K}_2^*$ とする.
- (2) (5.7) 式より \tilde{K}_2 を計算する.
- (3) (5.8) 式より \tilde{K}_1 を計算する.
- (4) \tilde{K} を実装し, 装置またはシミュレーションの応答を確認する
- (5) 所望の応答が得られたならば調整を終了する. 応答が振動的になった場合は $\tilde{\chi}$ を増加し, そうでない場合は減少させ, (2) に戻る.

8章では $\omega_n \neq 1$ の一般の場合および, システムの入力が \bar{u} ではなく u である場合を扱う. その場合であっても (3.16) 式と (4.4) 式から

$$K = \tilde{K} \omega_n J_M \quad (5.9)$$

とすることが出来るため, u に対する K は設計した \tilde{K} の $\omega_n J_M$ 倍で与えられる.

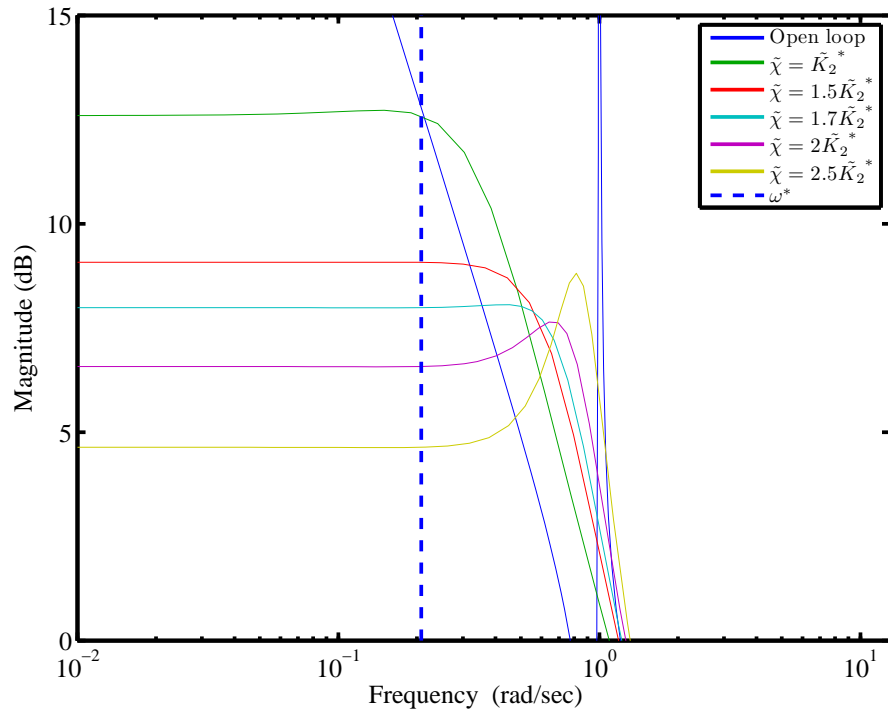


Fig. 5.1: Closed-loop gain each $\tilde{\chi}$

第6章 数値探索による最適な補償器の構成

前章では、ある周波数 ω^* 以下で平坦な閉ループゲイン特性を達成する補償器の構成法を提案した。ただし、 ω^* 以上の周波数帯域でゲインが悪化しない理論的補償がなく、補償器係数の1次元探索が必要であった。本研究ではこの後、探索を行うことなく最適な性能が得られる補償器構成法を提案する。そのために本章では補償器係数の2次元探索を行い、 \mathcal{H}_∞ ノルムが最小となる最適な \tilde{K} を構成した場合の閉ループゲインの概形は、慣性比によらずにある特徴を持つことを示し、動機づけを行う。

まず、最適な \tilde{K} を数値的に確認するため、探索可能なパラメータ全て $(r, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ を数値的に与えて G_d の安定性と \mathcal{H}_∞ ノルム γ を計算し、 γ が小さくなる補償器をメッシュ探索した。 r は5倍から30倍まで5倍刻み、 \tilde{K}_1 は0から-20まで-0.01刻み、 \tilde{K}_2 は0から-10まで-0.01刻みとした。それぞれの r に対して、最も γ が低くなった場合の閉ループゲインをFig. 6.1に示す。図より r によらず0.8 rad/sec付近にピークができ、そのゲインが低周波数域のゲインとほぼ同値であること、 r が大きくなるにつれてゲインは全体的に上昇し、その変化は鈍くなっていくことがわかる。

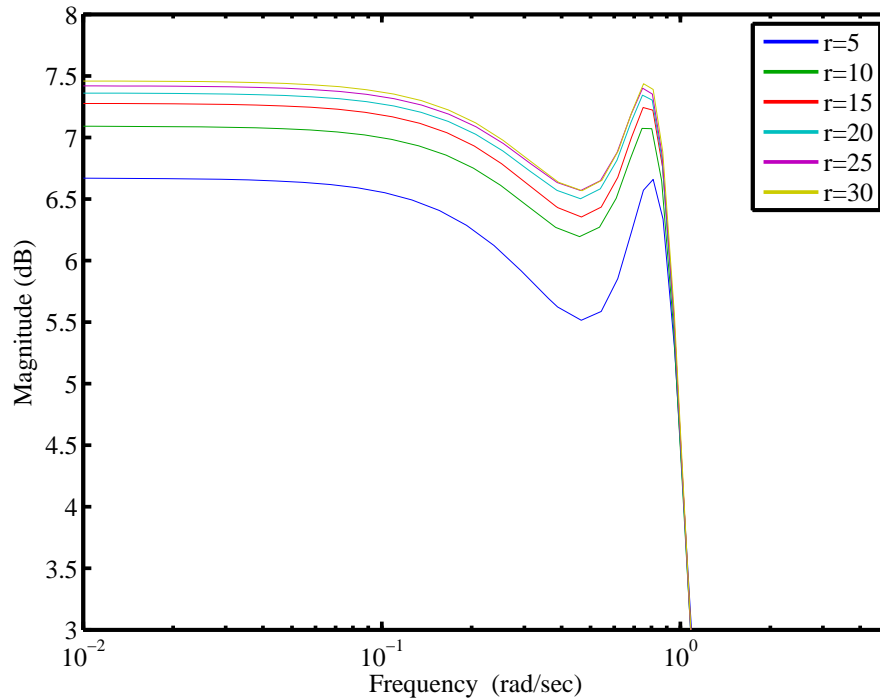


Fig. 6.1: Plot of G_{cl} each r

$r = 10$ の場合について、数値探索による最適な場合と、同じ $\tilde{\chi}$ から構成法 1 より構成した \tilde{K} を用いた場合を比較した。開ループゲインと合わせて Fig. 6.2 に示す。Fig. 6.2 において、二つの閉ループ系の $\tilde{\chi}$ は等しいため、直流ゲインも等しくなる。その直流ゲインと $\omega = \omega^*$ におけるゲインを一致させる構成法 1 の設計法では高域でピークができる問題が生じていたが、数値探索による最適な場合はそうならず、その問題が生じない補償器が存在することがわかる。

この探索における r と最適な \tilde{K}_1 , \tilde{K}_2 の対応を Fig. 6.3 に示す。図より \tilde{K}_2 は r によらずほぼ -1 一定で、 \tilde{K}_1 は r に従って直線的に減少していくことがわかる。

以上のことから、数値探索による最適な \tilde{K} を利用した場合、構成法 1 では構成出来ない閉ループゲインの概形をもつこと、またその補償器は r に依存して単純な構造を持つと考えられる。特に r を大きくしていくと G_{cl} のゲインがある形へ収束していくことから、 $r \rightarrow \infty$ の極限について次章でまず考える。

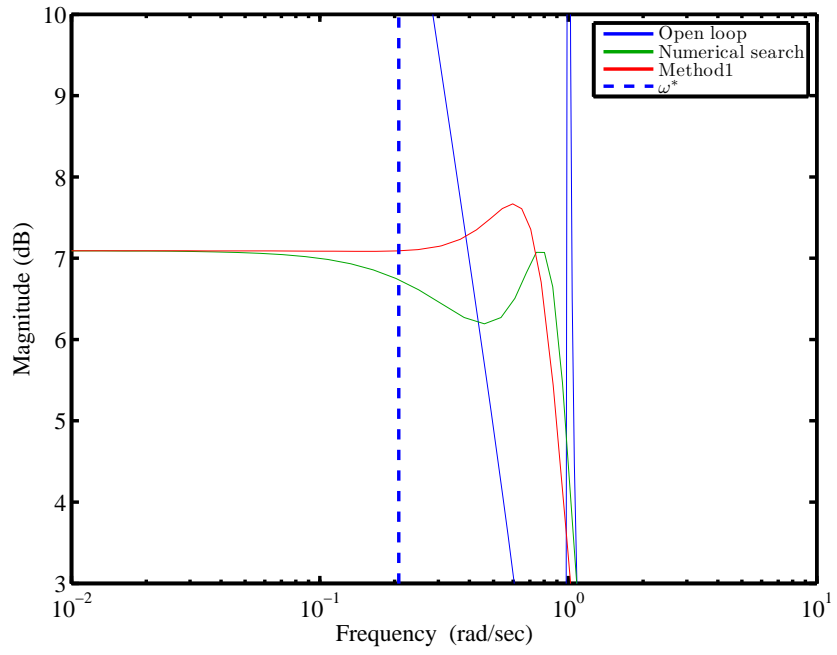


Fig. 6.2: Plot of open loop vs G_{cl} vs method1

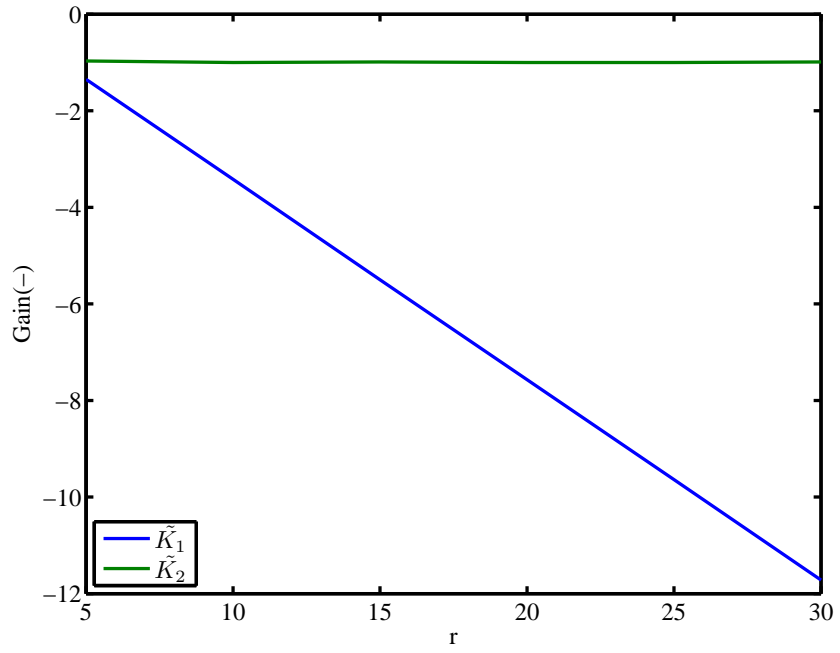


Fig. 6.3: Plot of r vs optimal \tilde{K}_1 , \tilde{K}_2

第7章 慣性比 ∞ の解析解に基づく補償器構成法

前章より、まず r が十分大きい場合の最適解を導出する。ただし Fig. 6.1 に見られるように、最適解において直流ゲインが \mathcal{H}_∞ ノルムを与えると仮定する。

7.1 慣性比が十分大きい場合

$r = \infty$ とした場合の二慣性系を考える。このときの対応する閉ループ伝達関数を G_∞ とすると、(4.2) 式で $(1 - \alpha) \rightarrow 1$ と近似することにより次式が成り立つ。

$$G_\infty(s) := \lim_{r \rightarrow \infty} G_d(s) = \frac{s^2 - \tilde{K}_2 s + 1}{s^3 - \tilde{K}_2 s^2 + s - A} \quad (7.1)$$

ただし、

$$A := \alpha \tilde{\chi} \quad (7.2)$$

であり、後に示すように $\alpha \rightarrow 0$ のとき $\tilde{\chi}$ は A が一定値をとるように発散する。以下の結果が成り立つ。

補題 7.1 (7.1) 式の伝達関数 G_∞ を安定化し、かつその \mathcal{H}_∞ ノルム γ を最小化する \tilde{K}_2 と A は

$$\tilde{K}_2 = -1, \quad A = 1 - \sqrt{2}$$

で与えられる。

証明 (7.1) 式の右辺の s に $j\omega$ を代入し、 $\Omega := \omega^2$ とおくと、閉ループゲイン (の二乗) は次式で与えられる。

$$|G_\infty(\Omega)|^2 = \frac{(1 - \Omega)^2 + \tilde{K}_2^2 \Omega}{(A - \tilde{K}_2 \Omega)^2 + \Omega(1 - \Omega)^2} \quad (7.3)$$

仮定より，次式が成り立つ．

$$|G_\infty(\Omega)|^2 \leq |G_\infty(0)|^2 \quad \forall \Omega \quad (7.4)$$

これは次式と等価である．

$$\Omega^2 - (A^2 + 2 - \tilde{K}_2^2)\Omega + (1 - A\tilde{K}_2)^2 + 2A^2(1 - \tilde{K}_2^2) \geq 0 \quad \forall \Omega \quad (7.5)$$

左辺は， Ω について下に凸の二次曲線であるから，上式が成り立つための必要十分条件は，(左辺) = 0 の解が虚数解または重解となること，すなわち，

$$D := (A^2 + 2 - \tilde{K}_2^2)^2 - 4\left((2 - \tilde{K}_2^2)A^2 - 2A\tilde{K}_2 + 1\right) \leq 0 \quad (7.6)$$

である．さらに， \mathcal{H}_∞ ノルムを最小化することは， $|A|$ を最大化することであるから，(7.6) 式の条件下で $|A|$ を最大化する A と \tilde{K}_2 が最適解を与える．ここで， D は \tilde{K}_2 を固定したとき， A に対して単調減少であることが次のように示せる： D が単調減少となるための必要十分条件は，

$$\frac{\partial D}{\partial A} = 4A(A^2 - 2 + \tilde{K}_2^2) + 8\tilde{K}_2 < 0 \quad (7.7)$$

である．ここで， $G_\infty(s)$ が安定な伝達関数となるための必要十分条件が，4章と同様にラウスフルビッツの安定判別より

$$0 > A > \tilde{K}_2 \quad (7.8)$$

と与えられ $\tilde{K}_2/A > 1$ が成り立つことに注意すると次式が成り立つ．

$$A^2 - 2 + \tilde{K}_2^2 > -2 > -2\frac{\tilde{K}_2}{A} \quad (7.9)$$

よって (7.7) 式が成り立つ．よって $D = 0$ が，各固定された \tilde{K}_2 に対して \mathcal{H}_∞ ノルムを最小化する A を与える．

ここで，(7.6) 式を展開し， A についての 4 次方程式の形にする．

$$D = A^4 + \tilde{K}_2^4 + 2A^2\tilde{K}_2^2 - 4A^2 - 4\tilde{K}_2^2 + 8A\tilde{K}_2 = 0 \quad (7.10)$$

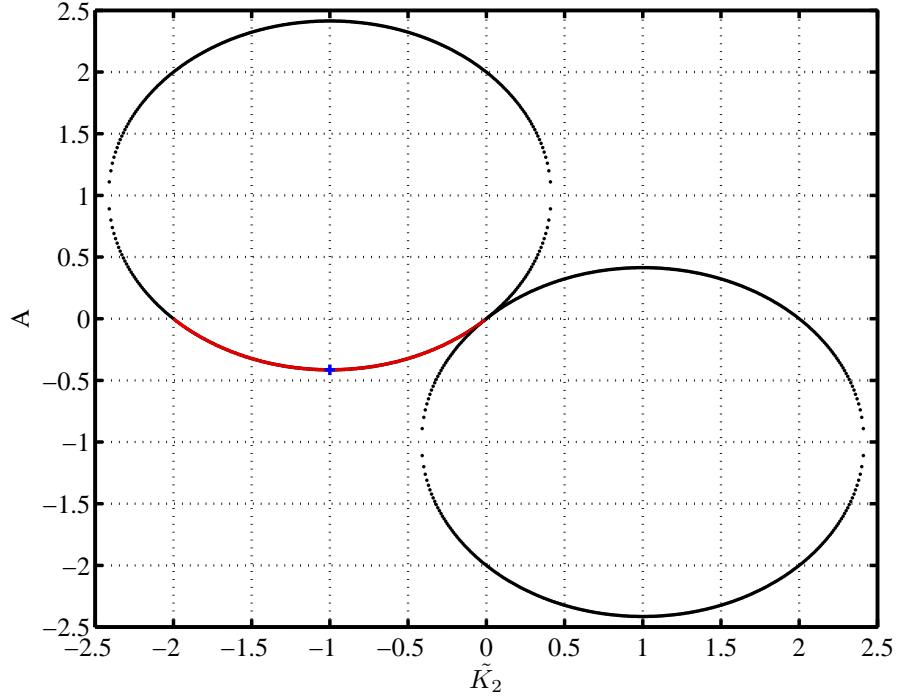


Fig. 7.1: Plot of $D=0$ ($r = \infty$)

\tilde{K}_2 と A の関係を確認するため、 $D = 0$ の概形を Fig. 7.1 に示す。Fig. 7.1 では \tilde{K}_2 を -2.5 から 2.5 まで 0.01 刻みで振り、MATLAB の関数 `roots` を用いて (7.10) 式の A に関する解を数値的に求め、虚部が 0 である解を A 軸側にプロットした。安定条件を満たす部分は赤、満たさない部分は黒とし、赤いプロットの中でも $|A|$ が最大化した点を青でマーキングしている。Fig. 7.1 をみると、原点で点対称な二つの円で構成されていることが分かる。このことは因数分解からも確認することができ、 $(A^2 + \tilde{K}_2^2)^2 = A^4 + \tilde{K}_2^4 + 2A^2\tilde{K}_2^2$ となることに注意して (7.10) 式を因数分解すると

$$\begin{aligned}
 D &= (A^2 + \tilde{K}_2^2)^2 - 4(A - \tilde{K}_2)^2 \\
 &= \left((A^2 + \tilde{K}_2^2) + 2(A - \tilde{K}_2) \right) \left((A^2 + \tilde{K}_2^2) - 2(A - \tilde{K}_2) \right) \\
 &= \left(A^2 + \tilde{K}_2^2 + 2(A - \tilde{K}_2) \right) \left(A^2 + \tilde{K}_2^2 - 2(A - \tilde{K}_2) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

となり、円の方程式二つで表せる。この方程式のうち、閉ループ系の安定条件を満たす範囲を含むのは

$$\left(A^2 + \tilde{K}_2^2 - 2(A - \tilde{K}_2) \right) = 0 \tag{7.12}$$

である。求めている値は、 $D = 0$ の下で $|A|$ を最大化する \tilde{K}_2 であるから、円と傾きが 0 の接線の交点

である。そのような接線は，円の中心点と半径がわかれば良いから，(7.12) 式を変形して

$$(A - 1)^2 + (\tilde{K}_2 + 1)^2 = 2 \quad (7.13)$$

したがって，この円の中心の座標 $(\tilde{K}_2, A) = (-1, 1)$ と半径 $\sqrt{2}$ より，傾き 0 の接線との交点は，

$$A = 1 - \sqrt{2}, \quad \tilde{K}_2 = -1 \quad (7.14)$$

となり，この組み合わせが最適な \tilde{K}_2 と A の組み合わせとなる。

□

7.2 慣性比が有限の場合

本節では r が有限の場合を考える。 r が有限の場合、(7.3) 式は

$$|G_{cl}(\Omega)|^2 = \frac{(1 - \alpha - \Omega)^2 + \tilde{K}_2^2 \Omega}{(\alpha \tilde{\chi} - \tilde{K}_2 \Omega)^2 + \Omega(1 - \Omega)^2} \quad (7.15)$$

となり、補題 7.1 と同様に、 \mathcal{H}_∞ ノルムが直流ゲインで抑えられる条件は、次の D が負または 0 となること

$$D := \left(\left(\frac{\alpha \tilde{\chi}}{1 - \alpha} \right)^2 + 2 - \tilde{K}_2^2 \right)^2 - 4 \left[\left(2(1 - \alpha) - \tilde{K}_2^2 \right) \left(\frac{\alpha \tilde{\chi}}{1 - \alpha} \right)^2 - 2\alpha \tilde{\chi} \tilde{K}_2 + 1 \right] \leq 0 \quad (7.16)$$

となる。 \tilde{K}_2 を固定したとき $\tilde{\chi}$ について単調減少であることも前節と同様に示せるため、 $D = 0$ となるときに $|\tilde{\chi}|$ を最大化する \tilde{K}_2 を求めれば良い。 まず、(7.16) 式を展開し、

$$D = \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^4 \alpha^4 \tilde{\chi}^4 + \frac{2\tilde{K}_2^2 + 4(2\alpha - 1)}{(1 - \alpha)^2} \alpha^2 \tilde{\chi}^2 + 8\tilde{K}_2 \alpha \tilde{\chi} + \tilde{K}_2^4 - 4\tilde{K}_2^2 = 0 \quad (7.17)$$

とする。これは(7.10)式から(7.11)式のように簡単に因数分解することが出来ない。また、慣性比が1,5,10,20倍の場合に、Fig. 7.1と同様の方法で(7.17)式をプロットしたものをFig. 7.2に示す。Fig. 7.2から、慣性比が小さくなるほど $D = 0$ の概形は、Fig. 7.1から離れていき、 $r = 1$ では楕円ですらない形となっている。また最適な \tilde{K}_2 が -1 から離れていくことが分かる。

このように、 r が有限の場合には、前節のように解を簡単に得ることは出来ない。本研究では高慣性比であることを利用した近似を用いることで、補題 7.1 と同様に因数分解によって簡単に最適値に近い $\tilde{\chi}$ を得ることを目指す。具体的には、(7.17) 式の第二項に含まれている $(2\alpha - 1)$ に着目し、因数分解が可能になることを狙ってこれを $-(1 - \alpha)^2$ と置き換える。すなわち問題設定より慣性比が十分大きいことから、 $-(1 - 2\alpha + \alpha^2) \approx -(1 - 2\alpha)$ と近似すると(7.17)式は、

$$\begin{aligned} D &\approx \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^4 \alpha^4 \tilde{\chi}^4 + \left(\frac{2\tilde{K}_2^2}{(1 - \alpha)^2} - 4 \right) \alpha^2 \tilde{\chi}^2 + 8\tilde{K}_2 \alpha \tilde{\chi} + \tilde{K}_2^4 - 4\tilde{K}_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^4 \alpha^4 \tilde{\chi}^4 + \tilde{K}_2^4 + \frac{2}{(1 - \alpha)^2} \alpha^2 \tilde{\chi}^2 \tilde{K}_2^2 - 4\alpha^2 \tilde{\chi}^2 + 8\tilde{K}_2 \alpha \tilde{\chi} - 4\tilde{K}_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (7.18)$$

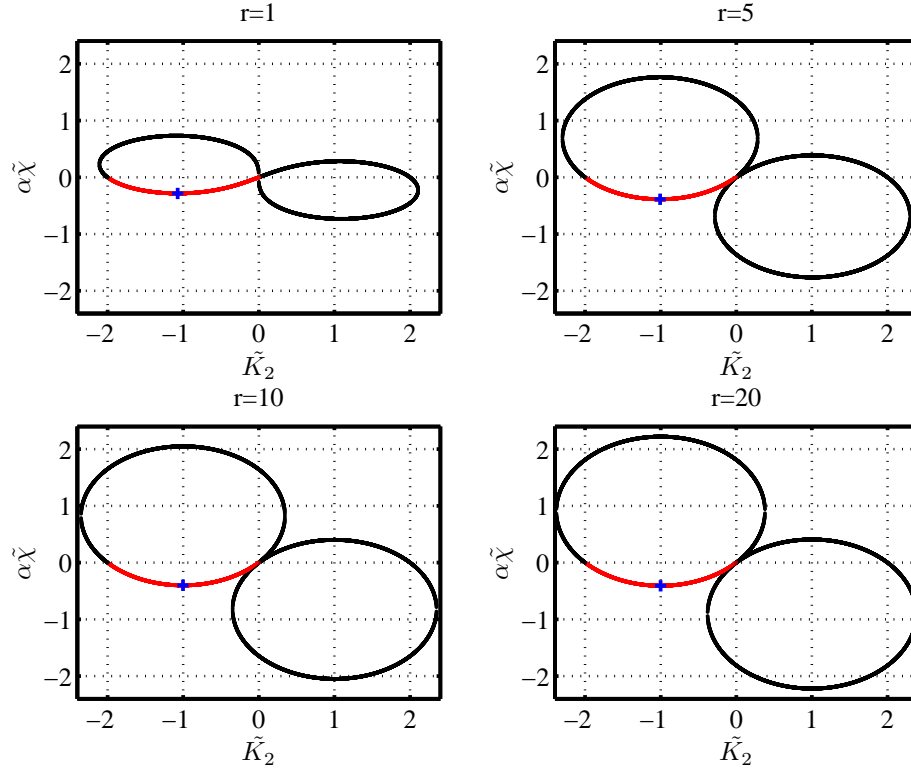


Fig. 7.2: Plot of $D=0$ ($r = 1, 5, 10, 20$)

となる。式の第1項から第3項，第4項から第6項でそれぞれ因数分解を行うと，

$$\begin{aligned}
 D &\approx \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} \alpha^2 \tilde{\chi}^2 + \tilde{K}_2^2 \right)^2 - 4(\alpha\tilde{\chi} - \tilde{K}_2)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} \alpha^2 \tilde{\chi}^2 + \tilde{K}_2^2 - 2(\alpha\tilde{\chi} - \tilde{K}_2) \right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} \alpha^2 \tilde{\chi}^2 + \tilde{K}_2^2 + 2(\alpha\tilde{\chi} - \tilde{K}_2) \right) = 0 \quad (7.19)
 \end{aligned}$$

となり，近似したことによって D は2つの楕円の方程式で構成される方程式となることが分かる。ここから，安定条件の範囲 $0 > \alpha\tilde{\chi} > \tilde{K}_2$ を含む楕円

$$\left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} \alpha^2 \tilde{\chi}^2 + \tilde{K}_2^2 - 2(\alpha\tilde{\chi} - \tilde{K}_2) \right) = 0 \quad (7.20)$$

に着目し，変形を進めると，

$$\left(\frac{\alpha\tilde{\chi} - (1-\alpha)^2}{1-\alpha} \right)^2 + (\tilde{K}_2 + 1)^2 = (1-\alpha)^2 + 1 \quad (7.21)$$

が得られる。補題 7.1 と同様に，最適な \tilde{K}_2 と $\tilde{\chi}$ は傾きが 0 の接線との交点である。したがって最適な \tilde{K}_2 は -1 であることが分かる。一方， $\tilde{\chi}$ については，(7.21) 式に $\tilde{K}_2 = -1$ を代入した

$$\left(\frac{\alpha\tilde{\chi} - (1-\alpha)^2}{1-\alpha}\right)^2 = (1-\alpha)^2 + 1 \quad (7.22)$$

を解けばよい。そのためにまず両辺の平方根をとるが，このとき安定条件を満たすため右辺は負を選択する。

$$\left(\frac{\alpha\tilde{\chi} - (1-\alpha)^2}{1-\alpha}\right) = -\sqrt{(1-\alpha)^2 + 1} \quad (7.23)$$

さらに式変形することで最適な $\tilde{\chi}$ が

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\tilde{\chi}}{1-\alpha} &= (1-\alpha) - \sqrt{(1-\alpha)^2 + 1} \\ \frac{\alpha\tilde{\chi}}{1-\alpha} &= \left(1 - \frac{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 1}}{(1-\alpha)}\right) (1-\alpha) \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\tilde{\chi} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}}}{\alpha} (1-\alpha)^2 \quad (7.25)$$

と得られる。この $\tilde{\chi}$ は， $0 < \alpha < 1$ の範囲において $(1 - \sqrt{2}) < \alpha\tilde{\chi} < 0$ となることから，すべての慣性比に対して安定条件を必ず満たし，さらに慣性比が無限大の場合に前節の結果と一致する。

以上より，次の設計法を提案する。

構成法 2 以下の (1) から (3) を行う。

- (1) $\tilde{K}_2 = -1$ とする。
- (2) (7.25) 式より $\tilde{\chi}$ を計算する。
- (3) (5.8) 式より \tilde{K}_1 を計算する。

8 章では $\omega_n \neq 1$ の一般の場合および，システムの入力が \bar{u} ではなく u である場合を扱う。その場合であっても構成法 1 と同様に，(5.9) 式より u に対する K は設計した \tilde{K} の $\omega_n J_M$ 倍で与えられる。

第8章 数値例・実験による検証

8.1 近似が有効な範囲の確認

構成法 2 において近似を用いることによって与えられた χ が最適値と同等の性能を持つ具体的な範囲を調べるため、探索によって得られた結果と比較する。ただしここでの探索は、最適解の精度を向上させるため、6章で行った \tilde{K}_1 と \tilde{K}_2 に関するメッシュ探索ではなく、7章の (7.17) 式に基づいて行う。具体的には、 \tilde{K}_2 を 0.01 刻みで与え、MATLAB の関数 `roots` を用いて (7.17) 式の解 $\tilde{\chi}$ を得て、そのうち負の実数で安定条件 (4.7) 式を満たし、さらに $|\tilde{\chi}|$ が最大となる点を探すことにより求めた。

なお γ は小数点第3位で四捨五入し、構成法 2 の \tilde{K}_2 はすべて -1 のため省略している。 γ に着目すると、数値探索と構成法 2 の差は r が 10 倍以上から 0.02 dB 以下となっていることがわかる。よって提案補償器の導出に用いた近似が制御性能に与える影響は小さいと考えられる。

Table 8.1: Comparison of closed-loop \mathcal{H}_∞ norm γ

r	Numerical search			Proposed method	
	\tilde{K}_2	$\tilde{\chi}$	$\gamma(\text{dB})$	$\tilde{\chi}$	$\gamma(\text{dB})$
5	-1.01	-2.32	6.66	-2.34	6.70
10	-1.00	-4.41	7.10	-4.42	7.12
15	-1.00	-6.49	7.27	-6.50	7.28
20	-1.00	-8.57	7.36	-8.57	7.37
25	-1.00	-10.64	7.42	-10.64	7.42

8.2 シミュレーション

構成法 1, 構成法 2 によって, 駆動側角速度のみを用いた比例制御に対して外乱抑制性能を改善出来ることを数値シミュレーションにより示す. $r = 10$ とした \tilde{P} に対して, 次の 4 つの補償器を比較した.

- 構成法 1 によって設計した補償器 $K_{\text{prop}1}$
- 構成法 2 によって設計した補償器 $K_{\text{prop}2}$
- (5.4) 式を用いて設計した $K_{\omega_M} := \begin{bmatrix} 0 & \tilde{K}_2^* \end{bmatrix}$
- (7.17) 式に基づいて数値探索により得た最適解 (\mathcal{H}_∞ 補償器) K_∞

\tilde{P} に対して設計した結果の各補償器のパラメータとその γ を Table 8.2 に, 閉ループ系のゲイン特性を Fig. 8.1 に示す. 図より K_{ω_M} を用いる場合に比べて, $K_{\text{prop}1}$ を用いる場合は約 5.12 dB, $K_{\text{prop}2}$ を用いる場合は, γ を約 5.78 dB 低減出来ていることがわかる. また, K_∞ と $K_{\text{prop}2}$ はほぼ重なっており, Table 8.2 より \mathcal{H}_∞ ノルムの差は 0.02 dB 程度である. Fig. 8.1 の妥当性を確認するために, MATLAB の関数 lsim によってシミュレーションを行った. 振幅 1 Nm, 周波数 0.1 rad/s の正弦波外乱を加えたときの ω_L の時間応答を Fig. 8.2 に示す.

Fig. 8.1 の 0.1 rad/s におけるゲインは K_{ω_M} , $K_{\text{prop}1}$ でそれぞれ 12.8 dB = 4.37, 7.49 dB = 2.37 で $K_{\text{prop}2}$ と K_∞ はこの周波数では同じゲインを持つため, 両方とも 7.02 dB = 2.23 となり, Fig. 8.2 と対応する.

Table 8.2: Parameter of controller

Controller	Parameter		$\gamma(dB)$
K_{ω_M}	$\tilde{K}_1 = 0$	$\tilde{K}_2 = \tilde{K}_2^* = -2.35$	12.9
$K_{\text{prop}1}$	$\tilde{K}_1 = -2.69$	$\tilde{K}_2 = -1.30$ ($\tilde{\chi} = 1.8\tilde{K}_2^*$)	7.78
$K_{\text{prop}2}$	$\tilde{K}_1 = -3.42$	$\tilde{K}_2 = -1.00$	7.12
K_∞	$\tilde{K}_1 = -3.41$	$\tilde{K}_2 = -1.00$	7.10

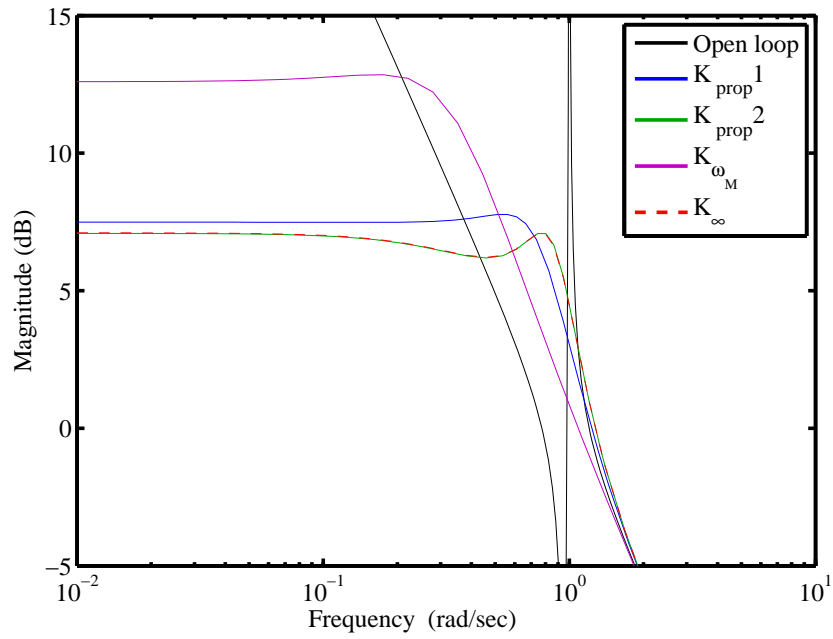


Fig. 8.1: Numerical examples of K_{ω_M} and K_{prop1} , K_{prop2} , K_{∞}

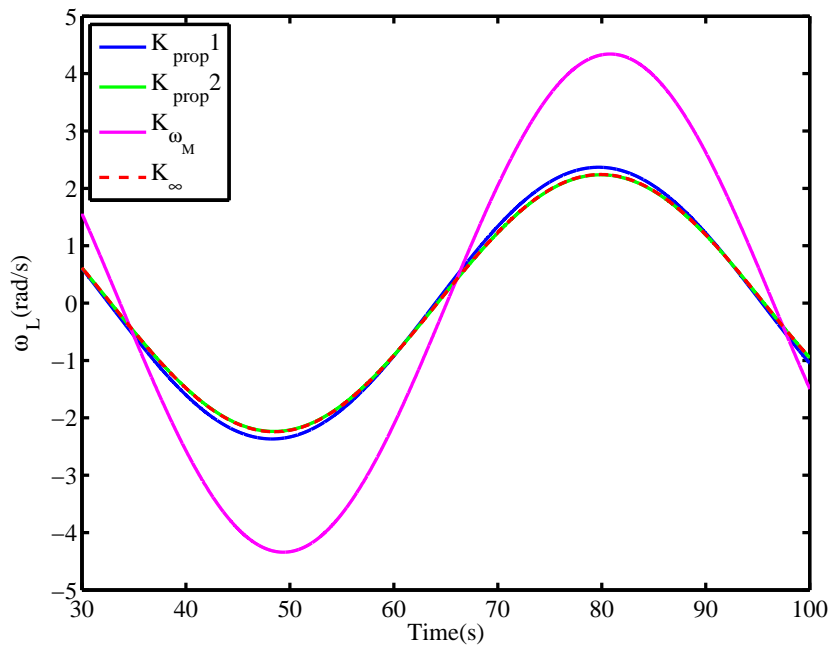


Fig. 8.2: Simulation result

8.3 軸バネの実験装置における実験

2.2節で示した慣性比 11.5 倍の軸バネの実験装置に対して前項と同様に 4 つの補償器を設計した。実装は次の手順で行った。

1. Table 3.2 から α を読み取り, 4 つの補償器それぞれの方法で \tilde{K} を設計する。
2. Table 3.2 から ω_n を, Table 3.1 から J_M を読み取り, (5.9) 式より $K = \tilde{K}\omega_n J_M$ 倍する。

実装した各補償器のパラメータと P に対して適用した際の γ を Table 8.3 に, 閉ループ系の概形を Fig. 8.3 に示す。Table 8.3 について, すべての値は小数点第 3 位で四捨五入している。図より K_{ω_M} を用いる場合に比べて, $K_{\text{prop}1}$ を用いる場合では約 5.3 dB, $K_{\text{prop}2}$ を用いる場合では約 6.3 dB γ を低減出来ている。なお, $K_{\text{prop}2}$ の方が K_∞ よりも γ が約 0.02 dB 程度低くなっているが, K_∞ の探索時の刻みが十分小さくなかったためと考えられる。8.1 節から, 慣性比 10 倍以上では十分な近似が行えることが確認されているため, このまま以降に述べる実験を行った。

Table 8.3: Parameter of controller

Controller	Parameter				$\gamma(dB)$	
K_{ω_M}	$K_1 = 0$	$K_2 = -0.02$	$(\tilde{K}_1 = 0$	$\tilde{K}_2 = \tilde{K}_2^* = -2.50)$	35.25	
$K_{\text{prop}1}$	$K_1 = -0.02$	$K_2 = -0.01$	$(\tilde{K}_1 = -3.13$	$\tilde{K}_2 = -1.37$	$\tilde{\chi} = 1.8\tilde{K}_2^*)$	30.00
$K_{\text{prop}2}$	$K_1 = -0.03$	$K_2 = -0.01$	$(\tilde{K}_1 = -4.04$	$\tilde{K}_2 = -1.00)$	28.95	
K_∞	$K_1 = -0.03$	$K_2 = -0.01$	$(\tilde{K}_1 = -4.03$	$\tilde{K}_2 = -1.00)$	28.97	

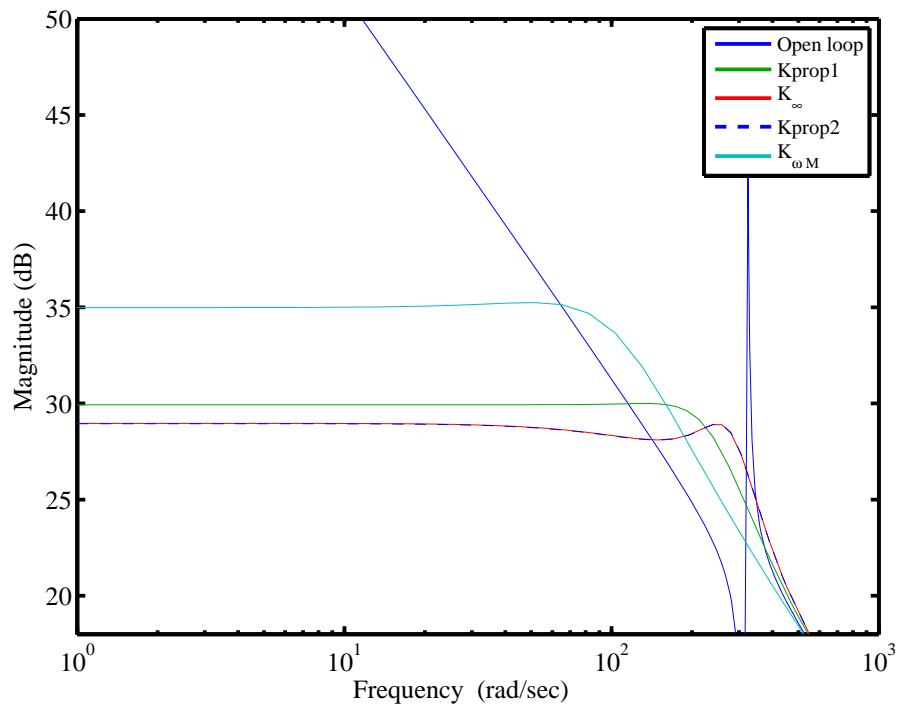


Fig. 8.3: Closed-loop gain calculated using P of $K_{\omega M}$ and $K_{prop1}, K_{prop2}, K_{\infty}$

8.3.1 ステップおよび正弦波外乱応答実験

本節では Fig. 8.3 の妥当性を確認するため、ステップ外乱と正弦波外乱を印加する実験を行った。実験時間は 6s で目標角速度は 20 rad/s 一定である。ただし、本実験では実験開始時の過渡応答よりも目標角速度まわりの定常応答を重視するため、実験開始 (0 s) から 1 s の間は PI 補償器を用いて速度を目標角速度 20 rad/s 一定となるようにし、1 s で検証する補償器に切り替えた。次の条件で外乱トルクを与えた。ただし補償器の出力 T_M について、装置の故障を防ぐ目的で ± 0.21 Nm の制限を設定している。

- 2s から 3s の間： -0.096 Nm(定格トルクの 15 %) のステップ外乱
- 4s から 5s の間：片振幅 0.064 Nm(定格トルクの 10 %), 5Hz の正弦波外乱

実際に印加したトルクの波形を Fig. 8.4 に示し、設計したそれぞれの補償器を適用した際の実験装置の応答をそれぞれ Fig. 8.5-Fig. 8.8 に示す。

ステップ外乱と正弦波外乱による ω_L の変動を Fig. 8.3 から予測する。Fig. 8.3 より、直流ゲインから 5 Hz までの閉ループゲインは、すべての補償器でほぼ一定であることが読み取れるため、各補償器を適用した際の γ をもとに予測値を計算する。 K_{ω_M} を用いた場合ではステップ外乱時に $10^{35.25/20} \times -0.096$ より ω_L は -5.56 rad/s の変動、正弦波外乱時 $10^{35.25/20} \times -0.064$ より ω_L は最大 3.70 rad/s の変動が予測できる。実際に Fig. 8.5 を確認すると、入力された外乱に対して予測値と同程度の変動していることが読み取れる。同様に、他の補償器を用いた場合の外乱入力に対する ω_L の変動は、 K_{prop1} を用いた場合はステップ外乱時 -3.04 rad/s 正弦波外乱時 2.02 rad/s, K_{prop2} を用いた場合はステップ外乱時 -2.69 rad/s, 正弦波外乱時 1.80 rad/s, K_{∞} を用いた場合もステップ外乱時 -2.69 rad/s, 正弦波外乱時 1.80 rad/s と予測できる。それぞれに対応する実験結果 Fig. 8.6-Fig. 8.8 を見ると、予測値と同程度の変動が確認でき、Fig. 8.3 は妥当であるといえる。

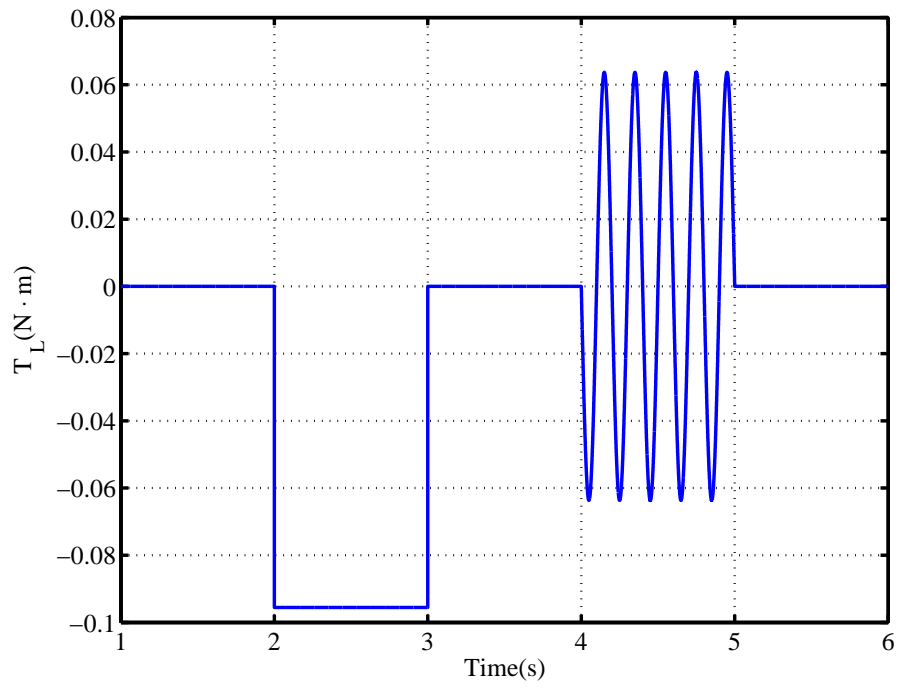


Fig. 8.4: Plot of T_L

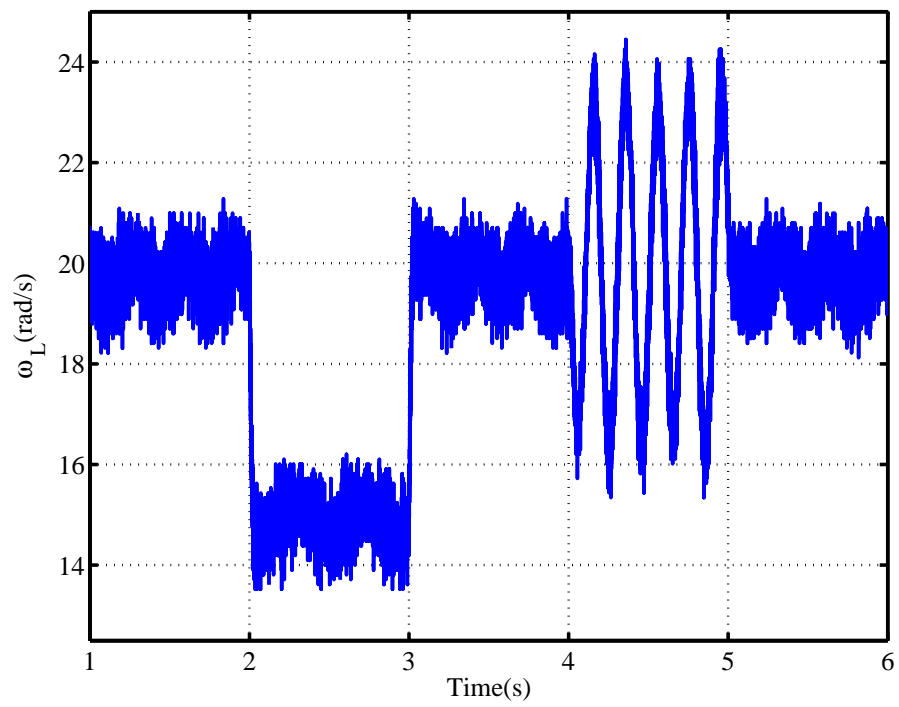


Fig. 8.5: Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{ω_M}

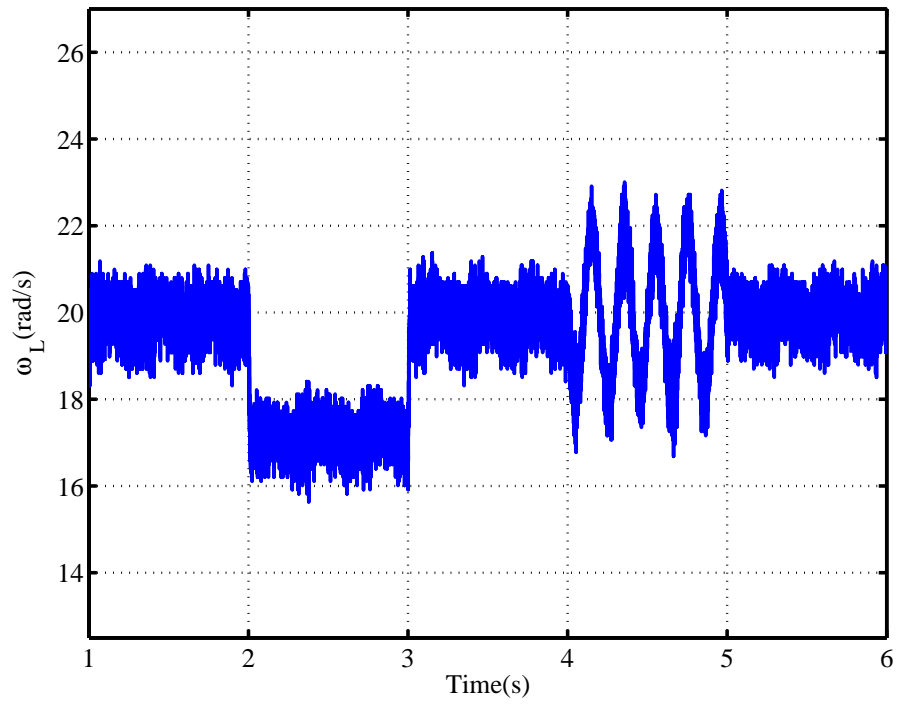


Fig. 8.6: Experimental result with step and sinusoidal disturbance using $K_{\text{prop}1}$

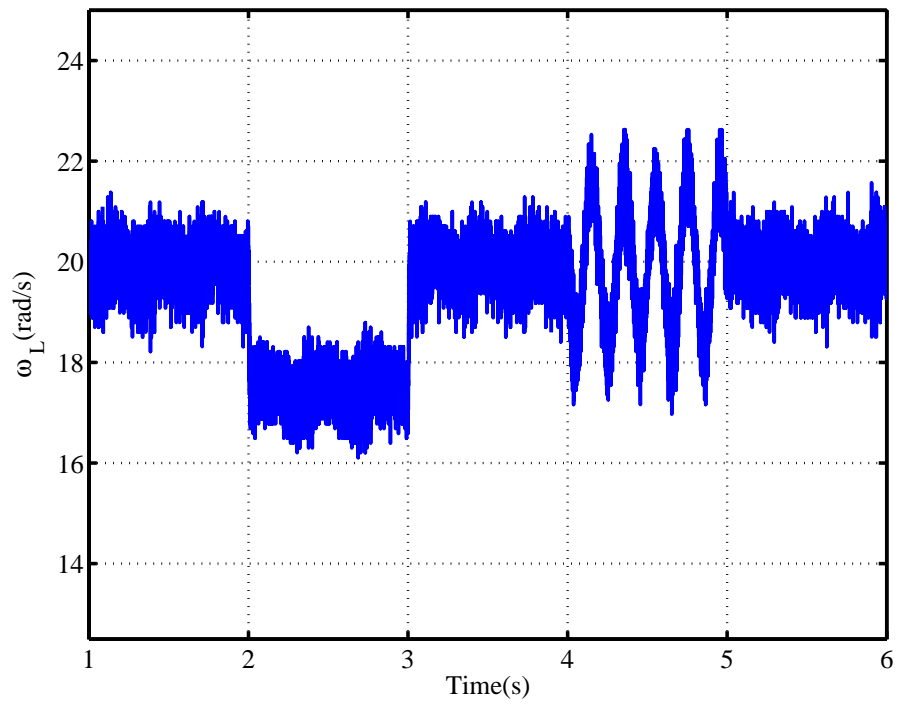


Fig. 8.7: Experimental result with step and sinusoidal disturbance using $K_{\text{prop}2}$

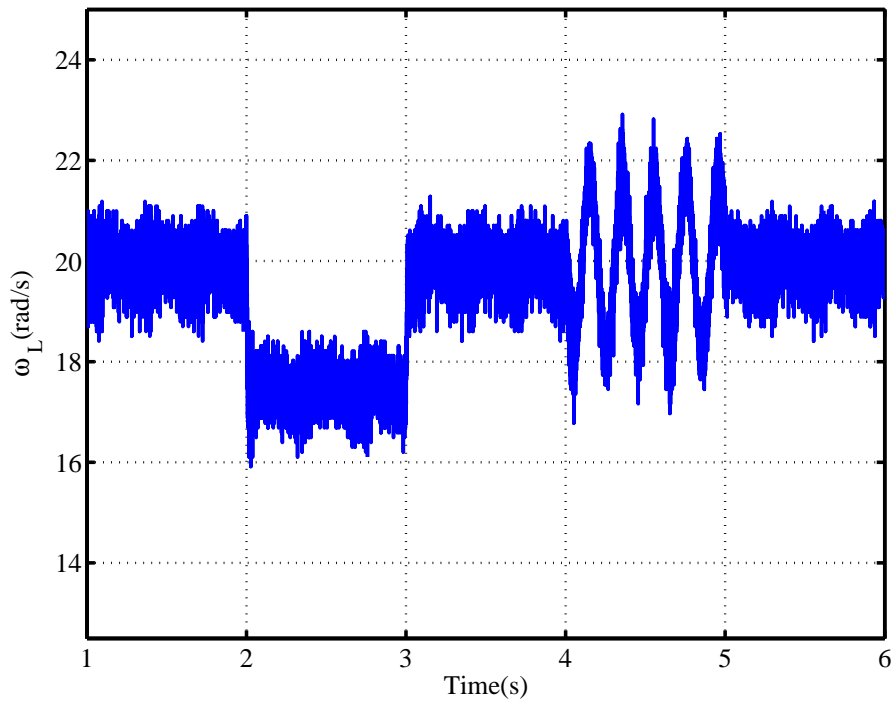


Fig. 8.8: Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_∞

8.3.2 広帯域外乱応答実験

本項では、より一般的な外乱を念頭に、広帯域外乱を用いて Fig. 8.3 の妥当性を確認する。具体的には、外乱とそれに対する ω_L の実験結果を用いて周波数分析を行い閉ループゲインを算出することで、Fig. 8.3 の妥当性を確認する。

実験手順として、前節と同様に実験開始 (0 s) から 1 s までは PI 補償器を用いて角速度を目標角速度 20 rad/s 一定となるようにし、1 s で検証する補償器に切り替える。外乱 T_L は振幅 0.096 Nm の広帯域外乱で、rand 関数 (疑似乱数) により生成される。実験時に取得した入出力信号 T_L と ω_L について、それぞれパワースペクトル密度 (PSD) を計算し、 ω_L の PSD を T_L の PSD で除して求めた閉ループゲインを Fig. 8.9-Fig. 8.12 に示す。また、比較のために Fig. 8.3 で示される閉ループゲインも重ねて示す。

Fig. 8.9-Fig. 8.12 より、100 Hz より低域で実験結果と計算結果がほぼ一致していることが確認できる。100 Hz 以降の実験結果と計算結果のズレは ω_M と ω_L の速度の算出における疑似微分によるものと考えられる。また Fig. 8.9-Fig. 8.12 のすべてにおいて 3 Hz, 60 Hz, 200 Hz にピークが見られることから、補償器ではなく実験環境固有のノイズが影響していると考えられる。以上より、Fig. 8.3 は妥当であると言える。

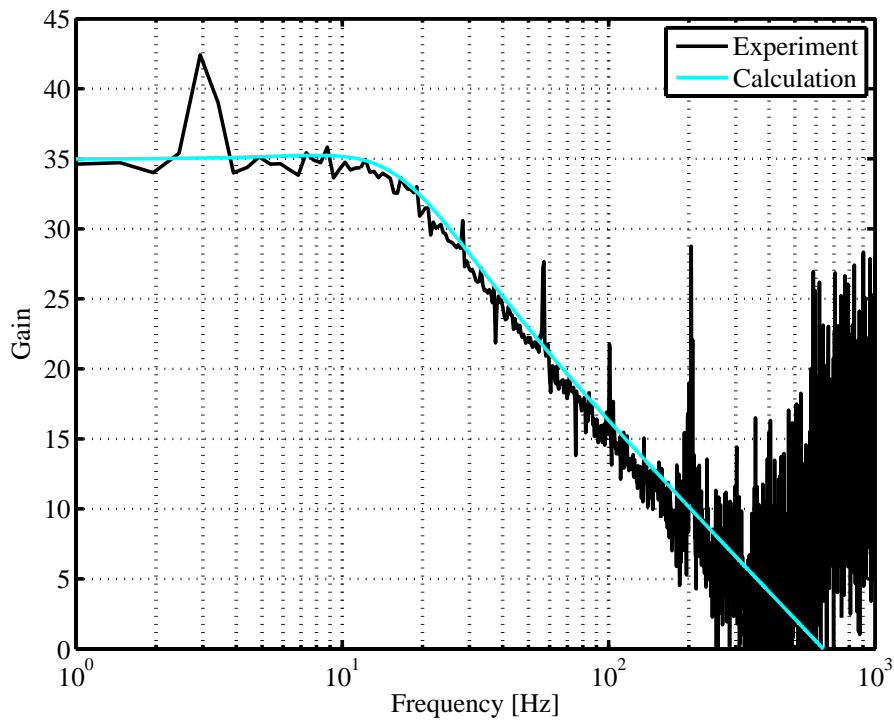


Fig. 8.9: Closed-loop gain(K_{ω_M})

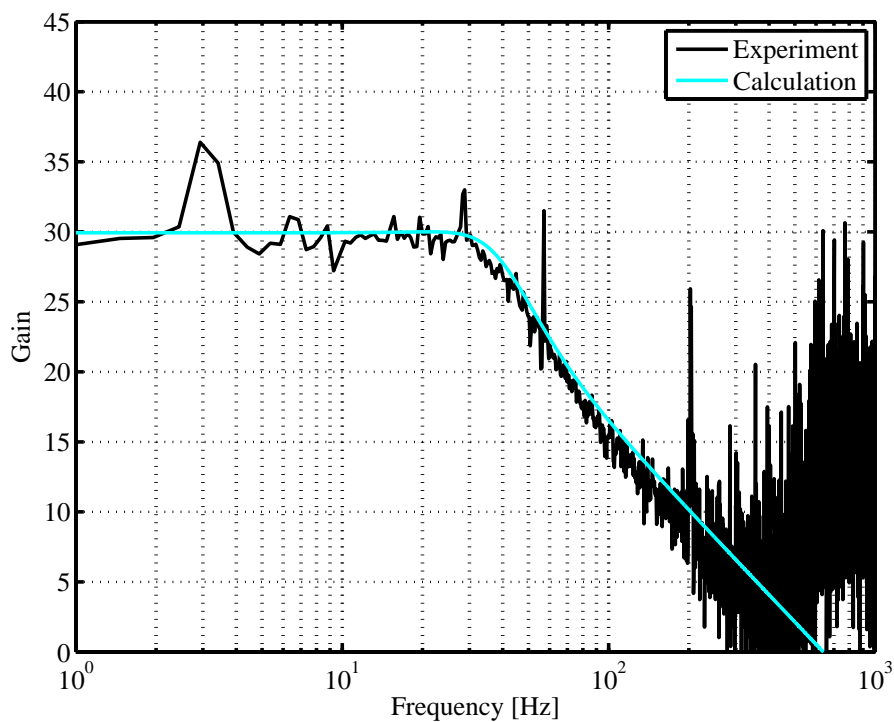


Fig. 8.10: Closed-loop gain(K_{prop1})

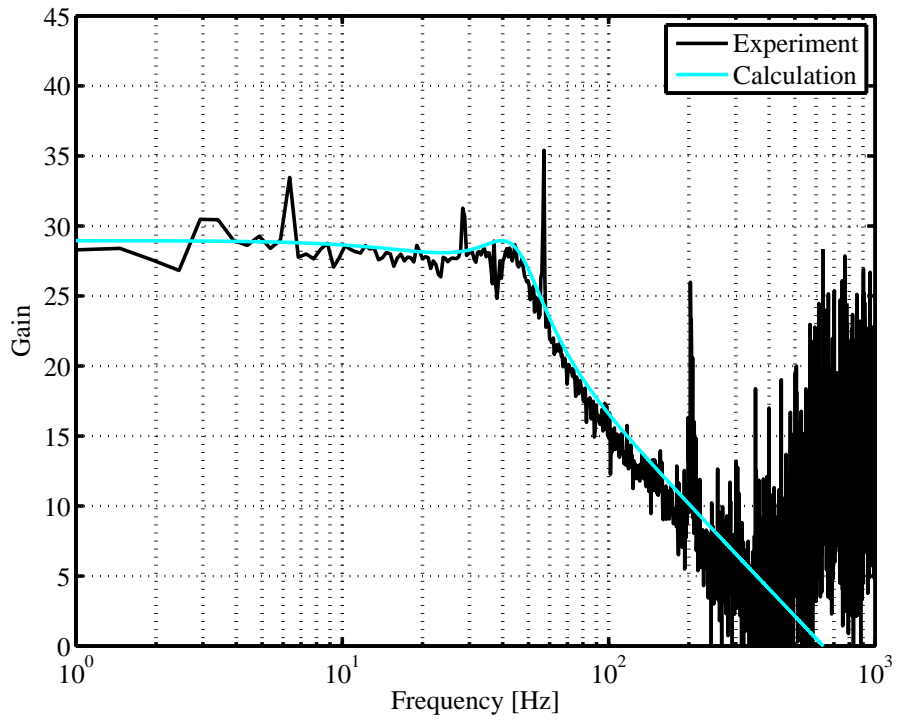


Fig. 8.11: Closed-loop gain(K_{prop2})

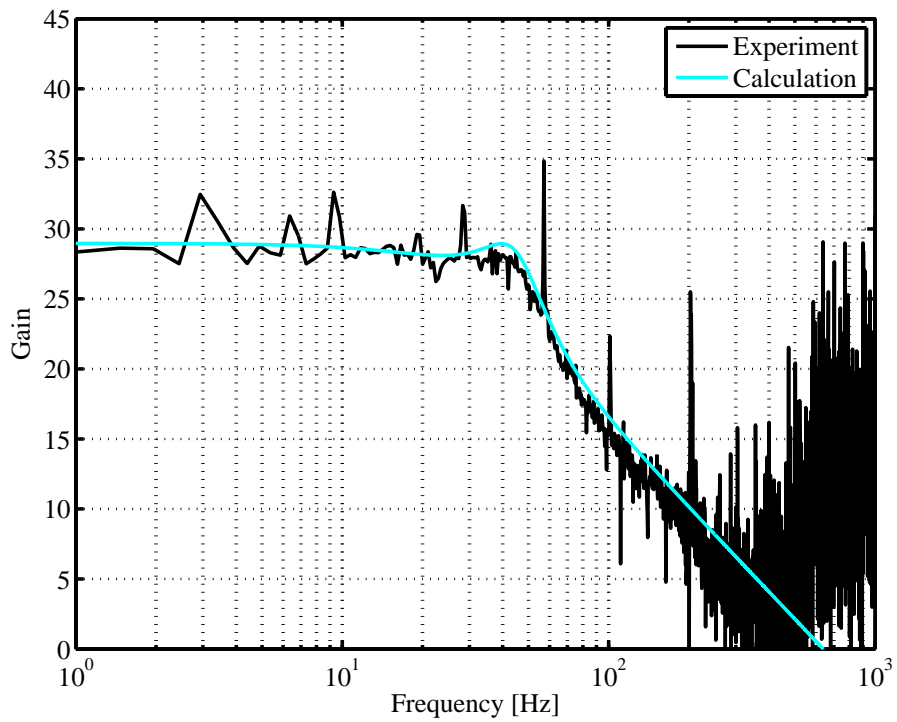


Fig. 8.12: Closed-loop gain(K_{∞})

8.4 軸トルクセンサの利用による提案法と等価な補償器の実装

本研究では ω_L を利用する補償器について議論してきたが、現実の制御対象によっては ω_L が従動側の情報であるため、その利用が難しいことがある。そのような場合でも、従動側ではなく駆動側に軸トルクセンサを追加することで T_S を利用することが考えられる。後に示すように、 ω_L は ω_M と T_S (の微分) から得ることが可能であるため、 ω_L が利用できるとして設計した補償器 K から、等価な外乱抑制性能を持つ T_S を利用する補償器 K_{T_S} を構成できる。本節では、軸トルクセンサを追加した実験装置を用いて、Fig. 2.3 の閉ループ系に対応する K_{T_S} を前節までの補償器と同等の性能を持つ補償器として実装する手順を示し、実機への適用について検討する。

まず、2.3 節で述べたトルクセンサを用いた実験装置の物理モデル P_{T_S} と周波数応答を Fig. 8.13 に示す。青線が計測した周波数応答 \hat{P}_{T_S} で、赤線が P_{T_S} である。それぞれ入力 $u := \begin{bmatrix} T_L & T_M \end{bmatrix}^T$ から出力 $y := \begin{bmatrix} \omega_L & T_S & \omega_M \end{bmatrix}^T$ までの伝達関数行列である。ここで、 $\hat{P}_{T_S ab}(s)$ を b から a までの伝達関数とし、 $a = 1, 2, 3$ がそれぞれ ω_L, T_S, ω_M に、 $b = 1, 2$ がそれぞれ T_L, T_M に対応するとして次式のように表す。 $P_{T_S ab}(s)$ も同様である。

$$\hat{P}_{T_S}(s) := \begin{bmatrix} \hat{P}_{T_S 11}(s) & \hat{P}_{T_S 12}(s) \\ \hat{P}_{T_S 21}(s) & \hat{P}_{T_S 22}(s) \\ \hat{P}_{T_S 31}(s) & \hat{P}_{T_S 32}(s) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

P_{T_S} の状態空間表現は次のように与えられる。また、各物理パラメータは 3.1 節と同様の方法で \hat{P}_{T_S} から推定した。その結果を Table 8.4 に示す。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 \\ -\frac{K_S}{J_M} & -\frac{C_S}{J_M} & \frac{C_S}{J_M} & | & 0 & \frac{1}{J_M} \\ \frac{K_S}{J_L} & \frac{C_S}{J_L} & -\frac{C_S + C_L}{J_L} & | & \frac{1}{J_L} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ K_S & C_S & -C_S & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Fig. 8.13 を見ると、 $\hat{P}_{T_S 11}$ 、 $\hat{P}_{T_S 22}$ において、それぞれ約 2810rad/s、281rad/s に物理モデルにはなかつ

た二つめの反共振のピークが見られ、三慣性系になっていると考えられる。これは、Fig. 2.7において、トルクセンサを追加する際に両側にシングルディスクカップリングを使用して軸の接続を行ったために、剛性が低い部分が増え、 J_M または J_L とはみなされない慣性が大きくなってしまったためであると考えられる。

Table 8.4: Physical parameter of \hat{P}_{T_s}

J_M	$7.80 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
J_L	$7.08 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
K_S	1.88 Nm/rad
C_S	$1.1 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
C_L	$1.5 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
ω_n	163.5 rad/s (26.0 Hz)
ω_a	51.5 rad/s (8.2 Hz)

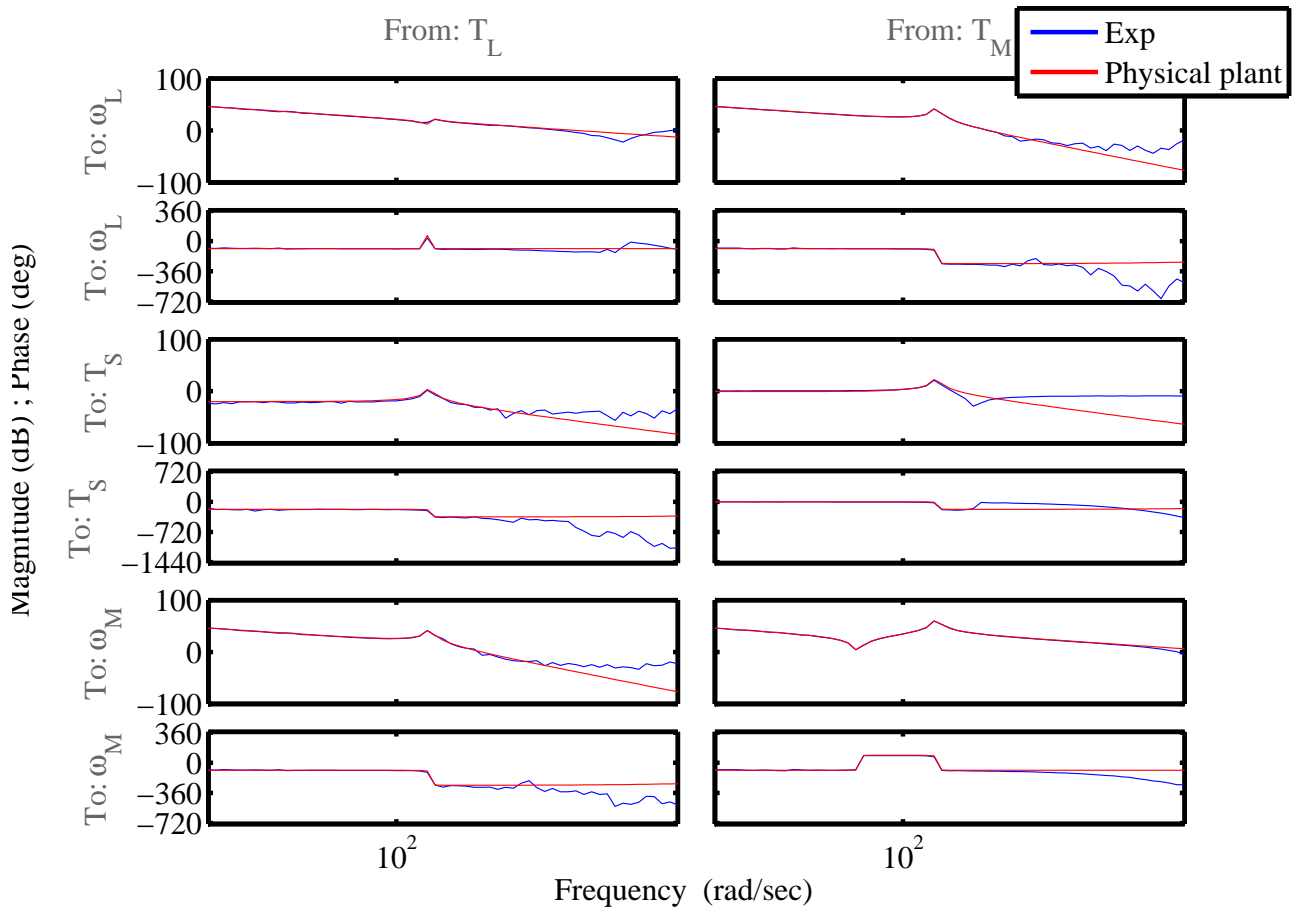


Fig. 8.13: Frequency response of \hat{P}_{T_S}

8.4.1 等価な補償器の実装

軸トルク T_S の微分 sT_S が利用できる とすると, (3.2) 式より

$$sT_S = K_S(\omega_M - \omega_L) + sC_S(\omega_M - \omega_L) \quad (8.3)$$

が成り立つ. ここで, 以降の実装では簡単のため $C_S = 0$ とすると (8.3) 式は

$$sT_S = K_S(\omega_M - \omega_L) \quad (8.4)$$

となる. 現実の装置では $C_S \neq 0$ であり, この状況は現実には起こらないが, Table 8.4 より C_S は小さい値であり, また実際に次節の実験では設計した補償器の一つが使用できることが確認されている.

したがって次の結果が成り立つ.

補題 8.1 (2.3) 式の補償器 K が存在するための必要十分条件は, $\begin{bmatrix} s T_S & \omega_M \end{bmatrix}^T$ を入力とする以下の補償器 K_{T_S} が存在することである.

$$K_{T_S} := \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{K_S} & \chi \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

証明 (2.3) 式右辺に (3.2) 式を代入し,

$$T_M = K y = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_M - s\frac{1}{K_S}T_S \\ \omega_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{K_S} & K_1 + K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sT_S \\ \omega_M \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

となることから明らか. □

したがって, 構成法 1 や構成法 2 で補償器を設計したのち, (8.5) 式の形で実装することによって, 等価な性能を持つ補償器を設計することが出来る. ただし, 現実の装置へ適用する場合には, 軸トルクを微分する際に, 完全な微分器の実装は不可能である. したがって次項では疑似微分器を利用した実験を行っている.

8.4.2 軸トルクセンサを追加した実験装置での実験

前項の (8.5) 式を利用して、軸トルクセンサを追加した実験装置で実験を行った。実験に用いた補償器は

- 構成法 2 で設計した $K_{\text{prop}2}$
- (8.5) 式に従って $K_{\text{prop}2}$ から変換した K_{T_S}

の 2 つである。 $K_{\text{prop}2}$ は 8.3 節と同じ手順で Table 8.4 に基づいて設計した。また $K_{\text{prop}2}$ を用いた実験では軸トルクセンサを追加した実験装置を用いて Fig. 2.2 を構成している。 K_{T_S} を用いる場合は Fig. 2.3 を構成して実験を行った。それぞれのパラメータを Table 8.5 に示す。ただし、Table 8.5 はそれぞれ小数点以下第 3 位で四捨五入している。

また、前項で述べたように実際の装置では完全な微分を利用することは不可能であるため、疑似微分器 $\frac{s}{\epsilon s + 1}$ を設計し、実験装置のトルクセンサから取得した T_S にこの疑似微分をかけて K_{T_S} へ入力するように制御系を実装した。 ϵ はカットオフ時定数で、カットオフ周波数 $\frac{1}{2\pi\epsilon}$ は 100 Hz と 500 Hz で検討を行った。 P_{T_S} に $K_{\text{prop}2}$ とそれぞれのカットオフ時定数を設定した場合の K_{T_S} を Fig. 8.14 に示す。

Fig. 8.14 から、カットオフ周波数 500 Hz の場合に γ は 1.1 dB の悪化、100 Hz の場合に γ は 6.1 dB の悪化となり、カットオフ周波数を低く設定するほど悪化することが分かる。これは理想的な微分に対して疑似微分ではゲイン特性、位相特性共にゆがみが生じるためであると考えられる。疑似微分器の構造を変更することによって改善が期待できるが、Fig. 8.14 の各閉ループ系は安定であるため、カットオフ周波数 500 Hz の疑似微分器をゼロ次ホールドで離散化し実機に実装して実験を行った。実験手順、印加外乱は 8.3.1 節と同様である。

設計したそれぞれの補償器を適用した際の実験装置の応答をそれぞれ Fig. 8.15 と Fig. 8.16 に示す。

Fig. 8.15 より $K_{\text{prop}2}$ を用いた場合の制御系は安定であることが分かるが、Fig. 8.16 より K_{T_S} の場合は不安定な結果となった。Fig. 8.16 に対応する T_M を Fig. 8.17 に示す。

Table 8.5: Parameter of controller

Controller	Parameter			
$K_{\text{prop}2}$	$K_1 = -0.04$	$K_2 = -0.01$	$(\tilde{K}_1 = -3.04$	$\tilde{K}_2 = -1.00)$
K_{T_S}	$-\frac{K_1}{K_S} = 0.02$	$\chi = -0.05$	$(-\frac{\tilde{K}_1}{K_S} = 1.62$	$\tilde{\chi} = -4.04)$

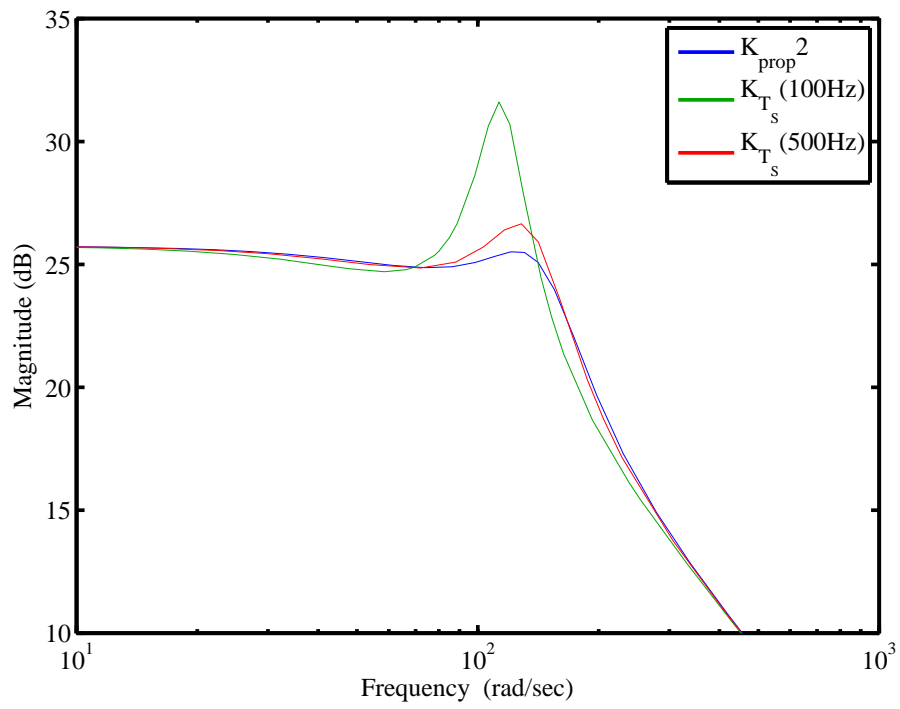


Fig. 8.14: Compare closed-loop gain with each $\frac{1}{2\pi\epsilon}$

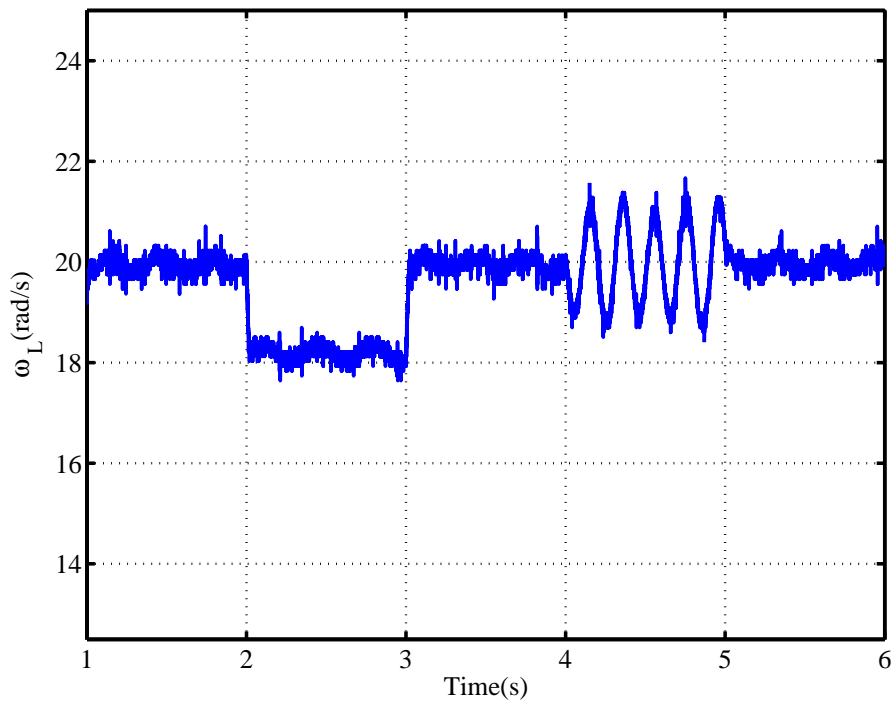


Fig. 8.15: Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{prop2}

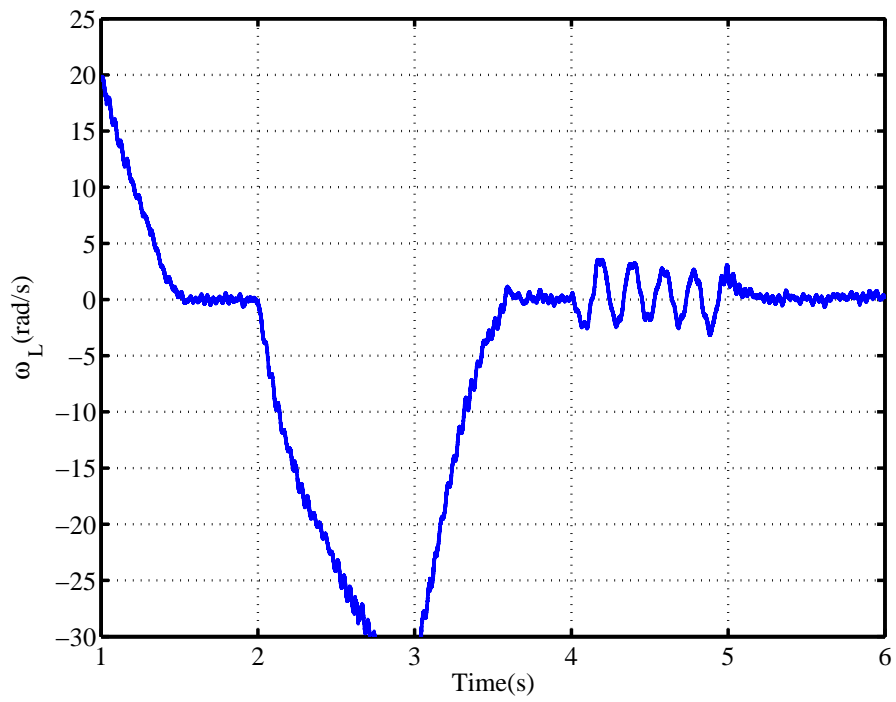


Fig. 8.16: Experimental result with step and sinusoidal disturbance using K_{T_S} (Incomplete differential cutoff frequency 500 Hz)

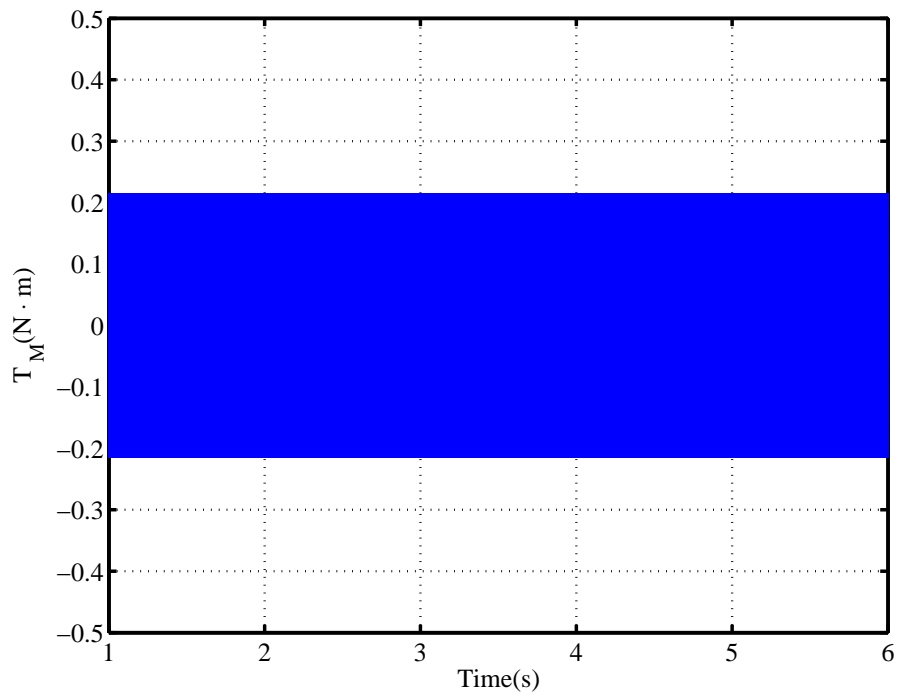


Fig. 8.17: Plot of T_M recorded in Fig. 8.16

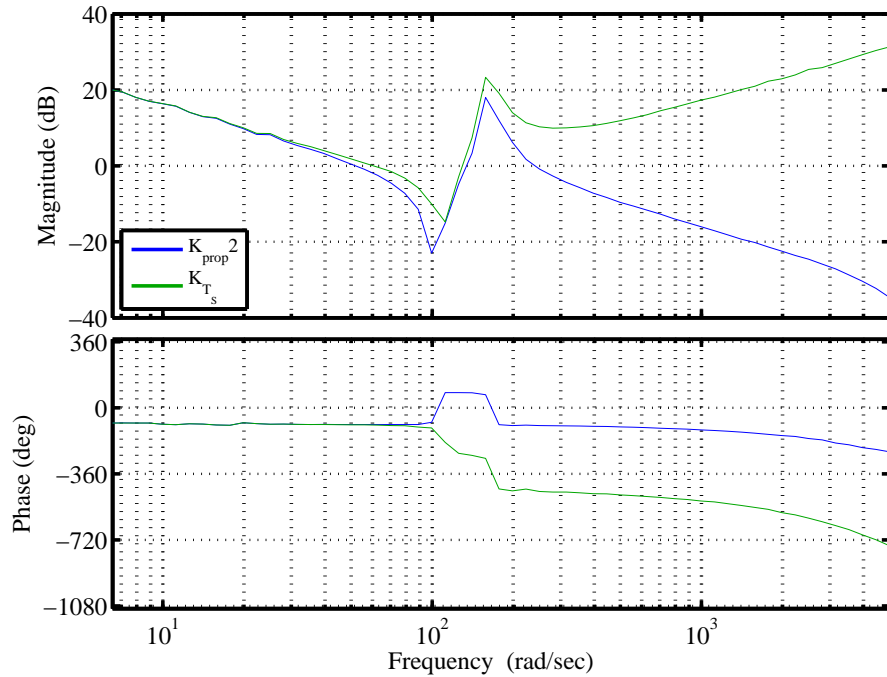


Fig. 8.18: Open-loop transfer function for each controllers

Fig. 8.17 より，制御入力 T_M が設定された実験装置のトルク制限 0.21 Nm にあたってしまっていること，また高周波で発振していることが分かる．この結果を考察するため，次の2つを Fig. 8.18 に示す．それぞれの一巡伝達関数が -1 倍されている理由は，古典制御における重ね合わせ点の負号と合わせるためである．

- $K_{\text{prop}2}$ を実装した場合の閉ループ系の一巡伝達関数 $-(\hat{P}_{T_S12} \frac{s}{K_1} + \hat{P}_{T_S32} K_2)$
- K_{T_S} を実装した場合の閉ループ系の一巡伝達関数 $-(\hat{P}_{T_S22} s \frac{K_1}{K_S} + \hat{P}_{T_S32} \chi)$

Fig. 8.18 を確認すると，高い周波数域において， $K_{\text{prop}2}$ に対して K_{T_S} のゲインが高域で上がっていくことが分かる．これは Fig. 8.13 の \hat{P}_{T_S22} と P_{T_S22} の差に対応していると考えられ，この差が制御系を不安定化していると考えられる．改善策としてはのトルクセンサの接続方法を見直すことと，装置全体の物理パラメータを見直し，三慣性系の影響をより高域にすることなどが考えられるが，これらについては今後の課題とする．

第9章 結言

本論文では、モータの回転制御に広く使われるPID補償器やノッチフィルタが低剛性・高慣性比の二慣性系において十分な外乱抑制性能を持つとは限らないことから、低剛性・高慣性比の二慣性系における外乱抑制性能の改善に取り組んだ。さらに、本論文の方針として、駆動側角速度に加えて従動側角速度を利用できる場合における補償器構造を考え、 \mathcal{H}_∞ 制御系設計で必要としていた、制御対象が変更される度の再設計を不要にするため、補償器の構造とその調整法を物理パラメータに陽に依存させるとした。具体的に駆動側及び従動側角速度に定数ゲインがかかる比例補償器を考え、本研究では2つの補償器構成法を提案した。1つ目は駆動側角速度の比例制御における制約を本研究の問題設定では起こらないことに着目し、低周波数域で平坦な特性を持つゲイン特性を得られる補償器構成法で1次元探索を行う必要があった。2つ目が慣性比 ∞ の場合の \mathcal{H}_∞ 補償器が解析的に得られることに着目し、慣性比が有限の場合にその導出過程にある近似を導入することによって、 \mathcal{H}_∞ 補償器を物理パラメータと簡単な演算によって近似的に構成する構成法であり、探索を行うことなく安定で最適な補償器を得ることが出来る。この近似が制御性能に与える影響は、慣性比が10倍以上の場合に最適解からの \mathcal{H}_∞ ノルムの悪化は0.02 dB程度であり、小さいと考えられる。

提案型補償器の実用性の確認はまずシミュレーションで行い、シミュレーションした負荷の角速度の時間応答の結果が解析的に求めた閉ループゲインの周波数特性と整合することを示した。次に、ステップ外乱と正弦波外乱を順に加える実験を行い、シミュレーションのときと同様に実験で取得した負荷の角速度の時間応答が解析的に求めた閉ループゲインの周波数応答と整合することを確認した。広帯域外乱を加える実験では、計算と実験で求めた閉ループゲインの周波数応答の良好な一致を確認し、提案型補償器の実用性は十分にあると結論づけた。

また、従動側角速度情報が利用できない場合に、駆動側にトルクセンサを追加することによって軸トルク微分情報を扱えるとするならば、本研究の設計法によって設計した補償器と同等の外乱抑制性能を達成する補償器を構成できることを示した。実際に実験を行ったところ、制御系が安定する結果は得られなかったが、これは実験装置がトルクセンサの追加により三慣性系となってしまったことで一巡伝達

関数の高周波数域がハイゲイン化していることが原因であることを述べた。同時に、そのような装置の場合でも、従動側角速度を用いる元の補償器は実際の実験で安定したことを示した。

提案した慣性比 ∞ の解析解に基づく構成法から得られた補償器は高慣性比に対して一意に安定で外乱抑制の意味で最適に近い性能を持つ。また周波数特性を持たないことから実機への適用が簡単でありながら、駆動側角速度のみを用いる場合に比べて大きく外乱抑制性能を改善することができる。一方で、従動側角速度の代わりに軸トルクを観測する制御系においても、提案した構成法により得られた補償器と同等の性能を達成できるようフィルタを調整・追加して実験することが今後の課題である。

謝辞

本学准教授の小林泰秀先生には、本研究を進めるにあたり手厚いご指導を賜りました。ここに、謹んで深甚なる謝意を表します。

研究で多忙であるにも関わらず、研究室同輩の井上陽仁君、稲田千翔之君には公私にわたり多大なご協力を頂き、非常に有意義な学生生活を過ごすことが出来ましたことに心より感謝申し上げます。

田辺研究室の鈴木雄大君、木村研究室の金澤愛輝君には本研究の実験装置の改良に関して手伝っていただきましたことに厚くお礼を申し上げます。

上記ならびに小林研究室の皆様におかれましては、ゼミ等を通じて多くの助言をいただきました。深く感謝の意を表し今後の皆様のご活躍をお祈り申し上げます。

参考文献

- [1] 株式会社安川電機, $\Sigma - V$ シリーズユーザーマニュアル 設計保守編 アナログ電圧・パルス列指令形 資料番号 SIJP S800000 45E
- [2] 三菱電機株式会社, 三菱汎用 AC サーボ MELSERVO-J3 シリーズ 汎用インターフェース 形名 MR-J3-□ A サーボアンプ技術資料集 形名 MR-J3-A GIJUTUSIRYOU 形名コード 1CW200 SH(名)030037-R(1308)MEE
- [3] オリエンタルモーター株式会社, チューニングレス AC サーボモーターユニット NX シリーズ ユーザーズマニュアル
- [4] 松井信行, 堀洋一, モータコントロールの新しい技術, 電気学会論文誌 D, Vol. 113, No. 10, pp. 1122–1137 (1993)
- [5] 森本茂雄, 亀山浩幸, 武田洋次, 2 慣性系の速度制御における共振比制御と \mathcal{H}_∞ 制御の特性比較, 電気学会論文誌 D, Vol. 116, No. 6, pp. 678–684 (1996)
- [6] 松井義弘, PID 制御による 2 慣性系の速度制御, 電気学会論文誌 D, Vol. 116, No. 4, pp. 441–447 (1996)
- [7] Guoguang Zhang and Junji Furusho, Speed Control of Two-Inertia System by PI/PID Control, IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 47, No. 3, pp. 603–609 (2000)
- [8] Krzysztof Szabat and Teresa Orłowska-Kowalska, Vibration Suppression in a Two-Mass Drive System Using PI Speed Controller and Additional Feedbacks—Comparative Study, IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 54, No. 2, pp. 1193–1206 (2007)
- [9] Roman Muszynski and Jan Deskur, Damping of Torsional Vibrations in High-Dynamic Industrial Drives, IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 57, No. 2, pp. 544–552 (2010)

- [10] 西村光博, 小林泰秀, 五井 裕弥, 物理パラメータに陽に依存する補償器を用いたベルト駆動二慣性系の外乱抑制制御, 第 56 回自動制御連合講演会, 740/743 (2013)
- [11] 株式会社安川電機, $\Sigma - V$ シリーズ総合カタログ 資料番号 KAJP S800000 42S
- [12] 大内茂人, 美多勉, 矢野浩司, \mathcal{H}_∞ 制御理論に基づく電動機の制振制御, 電気学会論文誌 D, Vol. 113, No. 3, pp. 325–332 (1993)
- [13] 森本茂雄, 武田洋次, \mathcal{H}_∞ 制御理論を用いた共振機械系の 2 自由度速度制御, 電気学会論文誌 D, Vol. 116, No. 1, pp. 65–70 (1996)
- [14] Yasuhide Kobayashi, Yuta Sugano, Tetsuya Kimura, A Disturbance Attenuation Controller Design for Two-inertia Systems which Explicitly Depends on Physical Parameters, SICE Annual Conference 2010 (2010)
- [15] 高山 誠, 小林 泰秀, 不安定な補償器を用いた低剛性・高慣性比の二慣性系における外乱抑制性能の改善, システム制御情報学会論文誌, vol. 30, No. 12, pp. 449–458 (2017)
- [16] K. Sugiura and Y. Hori, Vibration suppression in 2- and 3-mass system based on the feedback of imperfect derivative of the estimated torsional torque, IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 43, No. 1, pp. 56–64 (1996)
- [17] Y. Hori and H. Sawada and Yeonghan Chun, Slow resonance ratio control for vibration suppression and disturbance rejection in torsional system, IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 46, No. 1, pp. 162–168 (1999)
- [18] T. M. O’Sullivan and C. M. Bingham and N. Schofield, High-Performance Control of Dual-Inertia Servo-Drive Systems Using Low-Cost Integrated SAW Torque Transducers, IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 53, No. 4, pp. 1226–1237 (2006)
- [19] 真鍋 舜治, 係数図法による 2 慣性共振系制御器の設計, 電気学会論文誌 D (産業応用部門誌), Vol. 118, No. 1, pp. 58–66 (1998)

- [20] S. Thomsen and N. Hoffmann and F. W. Fuchs, PI Control, PI-Based State Space Control, and Model-Based Predictive Control for Drive Systems With Elastically Coupled Loads—A Comparative Study, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, Vol. 58, No. 8, pp. 3647-3657 (2011)

学会発表リスト (口頭発表)

(講演発表者の氏名に○印, 著者に下線を付す)

1. 日本機械学会 北陸信越支部第 55 期総会・講演会

”従動側角速度フィードバックによる不安定化に基づく二慣性系の外乱抑制性能の改善”

○岩本 慎太郎, 小林 泰秀

開催日：平成 30 年 3 月 3 日

2. 第 61 回 自動制御連合講演会

”高慣性比二慣性系の外乱抑制問題における従動側角速度の比例フィードバックを用いた物理定数に陽に依存する H_∞ 補償器の構成”

○岩本 慎太郎, 小林 泰秀

開催日：平成 30 年 11 月 17・18 日