

B-2 1次元ダクトの消音制御*

平成30年4月24日

1 目的

騒音を低減する最も簡単な方法は、グラスウール等の吸音材で騒音源を取り囲むことである。しかし、一次元ダクト(単純に管と考えるとすれば良い)は、室内の換気や空調の目的のために設置されるものであるから、騒音がうるさいからと言って、吸音材で塞いでしまうわけにはいかない。このような場合に、音で音を消す能動騒音制御(Active Noise Control)が用いられる。これに対して、吸音材等で騒音低減を図る方法は受動騒音制御(Passive Noise Control)と呼ばれる。

本実験の目的は以下の二つである:

[音響・振動工学の基礎] 空気柱の振動モードを測定し、その結果を理論モデルと比較することにより、音響・振動工学の基礎を理解する。騒音が単一周波数で既知の場合に、音波の重ね合わせにより騒音を制御音で相殺する開ループ制御(能動騒音制御の基礎)を検討する。

[制御工学の基礎] 騒音が単一周波数で未知の場合に、ゲインとむだ時間を用いた単純な閉ループ制御(制御工学の基礎)を行い、開ループ制御と比較する。周波数応答実験とナイキストの安定判別に基づいて閉ループ系の安定性を調べる。広帯域騒音の場合にロバスト制御と性能を比較する。

2 実験装置

図1に実験装置の概要を示す。ダクトは直径約10cm、長さ約1.7mの塩ビ管製で、左端にファンの騒音を模擬するためのスピーカ(SP K1)、ダクト中間に騒音を打ち消す制御音を生成するためのスピーカ(SP K2)が設置されている。ダクト右端は開口端になっており、後に述べる能動騒音制御では、ここから外部に放射される騒音が小さくなるようにSP K2を適切に駆動する。ダクトにはまた、移動式マイク(Mobile Mic.)、リファレンスマイク(Reference Mic.)、エラーマイク(Error Mic.)の三つのマイクが設置されている。これらは、A/D変換器、D/A

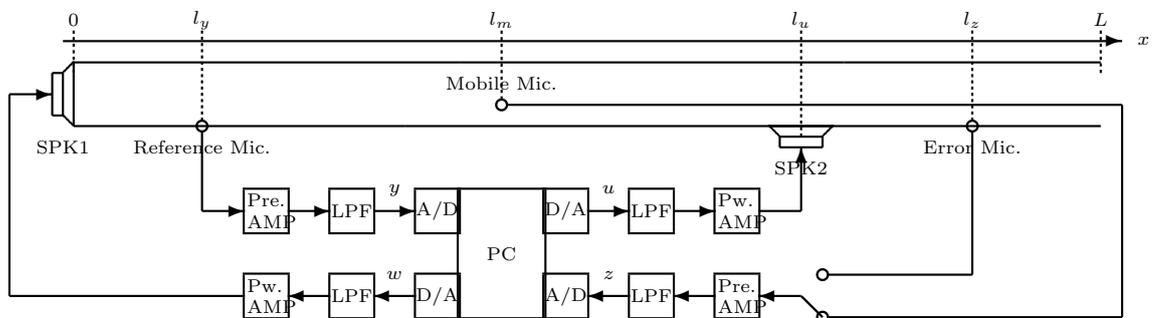


図1: 実験装置

*<http://c.nagaokaut.ac.jp/> 授業 3年学生実験 2018

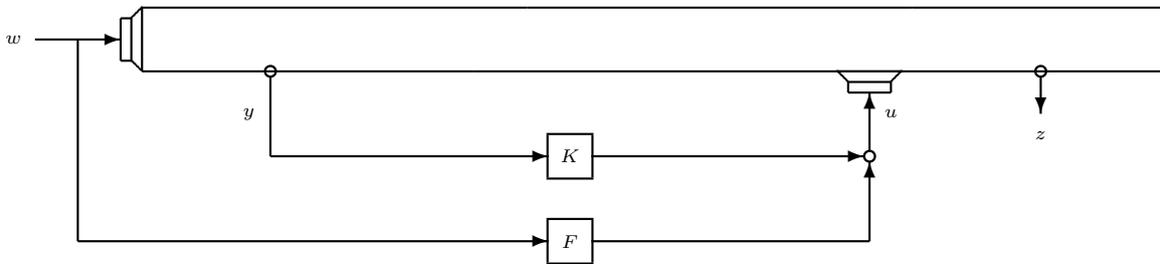


図 2: 開 / 閉ループ制御系のブロック線図

変換器、ローパスフィルタ (LPF)、パワーアンプ (Pw.AMP)、プリアンプ (Pre.AMP) を介してパソコンに接続され、スピーカを任意の信号 w , u で駆動し、マイクの入出力 z , y を計測できる。

本実験装置は二つの目的に使用される：移動式マイクを用いたダクト内圧力分布および共振周波数の測定 (1 日目) と、開 / 閉ループ制御による能動騒音制御 (2 日目) である。このため、移動式マイクとエラーマイクを切り換えて使用する。

図 2 に、開 / 閉ループ制御系のブロック線図を示す。 w , u , z , y は図 1 と共通で、パソコンから見た制御対象の四つの入出力信号を表す。ただし、表記の簡単のためパワーアンプ等を省略して示す。

[開ループ制御] $K \equiv 0$ とし、 z の振幅が小さくなるよう F を手動調整する。

[閉ループ制御] $F \equiv 0$ とし、 z の振幅が小さくなるよう K を設計 (第 5 節 ロバスト制御) または手動調整する。

Q1: どちらの構成が現実的か? どちらの性能が良いか?

3 音響・振動工学の基礎 (1 日目)

3.1 調和振動と複素振幅による表現

一般に、騒音や振動は周波数の異なる信号の合成で表され、フーリエ解析による周波数分析が行われる。また、騒音や振動を伴う現実のシステムの多くでは、騒音や振動源として単一周波数の正弦波が与えられた場合、システムの全ての物理量は同一周波数で調和振動する。実際、図 1 の SPK1 の駆動信号を

$$w(t) = \cos \omega t = \operatorname{Re} \{ e^{j\omega t} \}, \quad \omega := 2\pi f \quad (1)$$

と与えたとき、位置 x における圧力変動 (大気圧力からの変化分) $p(x, t)$ は

$$p(x, t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{p}(x) e^{j\omega t} \} \quad (2)$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ |\tilde{p}(x)| e^{j(\omega t + \angle \tilde{p}(x))} \right\} = |\tilde{p}(x)| \cos(\omega t + \angle \tilde{p}(x)) \quad (3)$$

と表せる。ここで、 $\tilde{p}(x)$ は位置 x により定まる複素数で、複素振幅と呼ばれる。その絶対値 $|\tilde{p}(x)|$ は $p(x, t)$ の振幅、位相角 $\angle \tilde{p}(x)$ は $w(t)$ に対する $p(x, t)$ の位相進みを表す。特に、位置 x に対する圧力振幅 $|\tilde{p}(x)|$ の分布は圧力分布と呼ばれ、これが極大、0 となる位置はそれぞれ圧力の腹、節と呼ばれる。節の前後で位相角は 180 度シフトする。このように、調和信号を式 (2) のように表すと、全ての信号に共通の成分 $e^{j\omega t}$ を除いて、時刻 t に依存しない $\tilde{p}(x)$ に関する議論を簡単に行える利点がある。

Q2: $\tilde{p}(x) = -2j$ (定数) のとき、 $w(t)$ と $p(x, t)$ の概形を描け。

3.2 空気柱の共振周波数と振動モード

減衰のない長さ L のダクトモデルを考える (図 3)。ダクトの長さ方向に x 軸をとり、 $x = 0$ が閉口端で $x = L$ が開口端となっているとする。ダクトの断面積を S 、 c_0 を音速、 ρ_0 を空気の密度とする。 $x = x_s$ の位置に音源

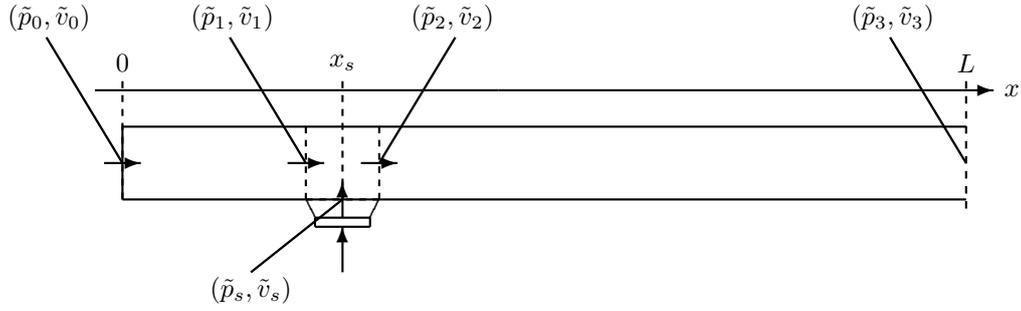


図 3: ダクトモデル

が一個、 x 軸に直交して設置されているとし、その断面積もダクトと同じ S であるとする。ただし、音源の x 軸方向の幅は無視する。音源の振動板の速度を $v_s(t)$

$$v_s(t) = \text{Re}\{\tilde{v}_s e^{j\omega t}\} \quad (4)$$

とする。位置 x における圧力を式 (2)、粒子速度を

$$v(x, t) = \text{Re}\{\tilde{v}(x) e^{j\omega t}\} \quad (5)$$

とすると、 $\tilde{p}(x)$ と $\tilde{v}(x)$ の間に以下の関係式が成り立つ。

$$\tilde{v}(x) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}(x)}{\partial x} \quad (6)$$

各部の圧力および粒子速度の複素振幅 $\tilde{p}(x)$, $\tilde{v}(x)$ の組を図 3 のように表記する。

次の境界条件を仮定する。

条件 1 閉口端 ($x = 0$): 粒子速度が 0、すなわち、

$$\tilde{v}(0) = 0 \quad \text{または} \quad \tilde{v}_0 = 0. \quad (7)$$

条件 2 開口端 ($x = L$): 圧力が 0、すなわち、

$$\tilde{p}(L) = 0 \quad \text{または} \quad \tilde{p}_3 = 0. \quad (8)$$

条件 3 音源の位置 ($x = x_s$):

(i) 圧力が連続 (音源の両側の圧力が等しい)、すなわち、

$$\tilde{p}(x_s + 0) = \tilde{p}(x_s - 0) \quad \text{または} \quad \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2. \quad (9)$$

(ii) 粒子速度の和が 0、すなわち、

$$\tilde{v}(x_s - 0) + \tilde{v}_s - \tilde{v}(x_s + 0) = 0 \quad \text{または} \quad \tilde{v}_1 + \tilde{v}_s = \tilde{v}_2. \quad (10)$$

このとき $\tilde{p}(x)$ は次式で与えられる (付録 A 参照)

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} \frac{\rho_0 c_0 \sin(k(x_s - L)) \cos(kx)}{j \cos kL} \tilde{v}_s & (0 \leq x \leq x_s) \\ \frac{\rho_0 c_0 \sin(k(x - L)) \cos(kx_s)}{j \cos kL} \tilde{v}_s & (x_s \leq x \leq L) \end{cases} \quad (11)$$

ここで k は波数で、 $k := \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0}$ と定義される。 $|\tilde{p}(x)|$ が無限大となる周波数が共振周波数であり、分母 $\cos kL = 0$ より、無数に存在する。低い周波数から一次共振周波数 f_1 , 二次共振周波数 f_2 , ... と定義すると、これらは

$$f_{m+1} = \frac{(2m+1)c_0}{4L} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

と与えられる。

Q3: 式 (12) は、ダクト両端で反射し続けるパルス状の進行波を考えると、式 (11) とは独立に、簡単に導出することができる。これを検討せよ。

本モデルでは減衰を考慮していないため、共振周波数における $|\tilde{p}(x)|$ は無限大に発散するが、現実のシステムには減衰が存在し、一定値に収束する。そのときの圧力分布を理論式と比較するため、 $x = x_s$ で 1 となるよう正規化した圧力振幅を $\bar{p}(x)$ と定義すると次式が成り立つ。

$$\bar{p}(x) := \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{p}(x_s)} = \frac{\cos(kx)}{\cos(kx_s)} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (13)$$

Q4: 式 (11) より、式 (13) を導出せよ。ヒント：共振時には、式 (11) の二つの場合は共通となる。

Q5: 一次および二次共振周波数における $|\bar{p}(x)|$ と $\angle \bar{p}(x)$ の概形を描け。

3.3 実験方法

1. 準備

まず、共振周波数の計算値を求める際にダクトの全長 L が必要となるので、これを測定すること。圧力分布の形状を考察するため、SPK2、リファレンスマイク、エラーマイクの位置 l_u, l_y, l_z も測定すること。音速 c_0 を求めるため、室温も測定すること。

PC 上で次のように入力すると、SPK1 の入力信号 $w(t)$ の振幅、SPK2 の入力信号 $u(t)$ の振幅、両者の周波数（共通）、および位相（ $w(t)$ に対する $u(t)$ の位相遅れ）、さらに、閉ループ制御のゲインとむだ時間（2 日目の実験で使用）をキーボードから調整することができる：

```
% insmod spkcont_module.o
% ./spkcont_app
```

終了時はメニューに従い q を押してコマンドプロンプトに戻った後、以下のように入力する：

```
% rmmmod spkcont_module
```

2. 共振周波数の測定

- (1) 可動式マイクを SPK1 に近接させて配置する。
- (2) SPK1 の入力信号 $w(t)$ の振幅を指定値（当日 TA が指示する。以下同様）にし、SPK2 の入力信号 $u(t)$ の振幅を 0 に設定する。
- (3) 周波数を最小値から徐々に高くしていき、可動式マイクの出力信号 $z(t)$ の振幅が極大となる最小の周波数（1 次共振周波数）を探し、数値を記録する。
- (4) さらに周波数を高くしていき、2 次共振周波数を記録する。
- (5) $w(t)$ の振幅を 0、 $u(t)$ の振幅を指定値に設定し、SPK1 の場合と同様に 1 次および 2 次共振周波数を記録する。

3. 共振モードの測定

- (1) $w(t)$ の振幅を指定値、 $u(t)$ の振幅を 0、周波数を先に測定した 1 次共振周波数に設定する。
- (2) $w(t)$ をオシロスコープのトリガとする。
- (3) $z(t)$ の振幅および $w(t)$ に対する遅れ時間を測定する。
- (4) 可動式マイクの位置を適当に変えながら上記の測定を繰り返し、以下のような表に整理する。位相は周波数を用いて計算すること。
- (5) 2 次共振周波数についても同様に測定する。さらに、 $w(t)$ の振幅を 0、 $u(t)$ の振幅を指定値として測定を繰り返す。

表 1: ?次共振モード ($w(t)$ の振幅 = ? V, $u(t)$ の振幅 = ? V)

可動式マイクの位置 $x(\text{m})$	$z(t)$ の振幅 (V)	遅れ時間 (ms)	位相 (deg)
?	?	?	?
⋮	⋮	⋮	⋮
?	?	?	?

3.4 レポート

以下の課題について A4 のレポート用紙にまとめて 2 日目の前日 17:00 までに、機械・建設 1 号棟 405 室 (小林居室) のメールボックスに提出せよ。ただし、図や実験方法等、このテキストに書いてあることは省略して良い。

課題 1. 式 (12) を用いて共振周波数を計算し、測定値と比較せよ。その違いが生じる理由について考察せよ (ヒント: c_0, L の測定精度、開口端補正 [1])。

課題 2. 共振モードの測定結果から、(a) マイクの位置 x と振幅、(b) マイクの位置 x と位相のグラフを描き、その形状について理論的に説明できることを述べよ (ヒント: 式 (13)、節および腹の位置、SPK1,2 の位置)。

課題 3. (開ループ制御の予想) $w(t)$ の振幅を指定値、周波数を 1 次または 2 次共振周波数に設定したとする。このとき、エラーマイク出力 z の振幅を 0 に近づけるために、 $u(t)$ の振幅と $w(t)$ に対する位相をどう設定すれば良いか。上記 (a) (b) の実験結果を引用しつつ、数値を挙げて具体的に予想せよ (2 日目の実験に用いる)。

レポートは全て回収し、希望があれば 1 学期終了後に返却する。

4 制御工学の基礎 (2 日目)

4.1 閉ループ制御系の補償器の構造

図 2 において $F \equiv 0$ とし、 z の振幅が小さくなるよう補償器 K を手動調整する場合、単純な構造の補償器が用いられる。ここではゲイン G とむだ時間 τ からなる次の補償器 (phase-delay controller) を用いる。

$$K(s) = Ge^{-s\tau} \quad (14)$$

ここで、 G と τ が調整すべき実数である。この補償器を用いたとき、その入出力信号に次の関係式が成り立つ。

$$u(t) = Gy(t - \tau) \quad (15)$$

4.2 閉ループ系の安定性とゲイン特性

閉ループ系が安定となる (= 発振しない) 条件: ナイキストの安定判別

安定なシステム L が与えられたとする。その伝達関数を $L(s)$ 、周波数応答を $L(j\omega)$ とする。このとき、システム L の出力を -1 倍して入力として戻した閉ループ系が安定となるための必要十分条件は、 $L(j\omega)$ の軌跡 ($\omega = -\infty \sim \infty$) が点 -1 を囲まないことである。

閉ループ系の (= w から z までの) ゲイン特性

w, u から z, y までの 2 入力 2 出力の安定な制御対象 G が与えられ、この伝達関数行列が

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (16)$$

であるとする。 y を入力、 u を出力とする補償器 K が与えられ、補償器の伝達関数を $K(s)$ とする。このとき、閉ループ系が安定となるための必要十分条件は、一巡伝達関数 $L(s) := -G_{yu}(s)K(s)$ に対するナイキストの安定判別で与えられる。

閉ループ系が安定であるとき、 w から z までの閉ループ系のゲイン特性は

$$|G_{cl}(j\omega)| \tag{17}$$

で与えられる。ただし、 $G_{cl}(s)$ は w から z までの閉ループ系の伝達関数

$$G_{cl}(s) = G_{zw}(s) + \frac{G_{zu}(s)K(s)G_{yw}(s)}{1 - G_{yu}(s)K(s)} \tag{18}$$

である。

4.3 実験方法

実験は1日目と同じ実験機を使って行い、MATLABによる解析は別のPCで行うこと。

1. 準備 = 1日目と同様。
2. 閉ループ制御：下記の手順で、まず予想してきた値を用いて実験を行い、結果を記録すること。その後、必要に応じて微調整を行うこと。
 - (1) 閉ループ制御のゲイン G は0として調整しない。むだ時間 τ も調整しない。
 - (2) $w(t)$ の振幅を指定値に設定し、周波数を先に測定した1次共振周波数に設定する。
 - (3) エラーマイクの信号 $z(t)$ の振幅が最小となるように $u(t)$ の振幅と位相を調整し、その結果を記録する。
 - (4) 2次共振周波数についても同様に実験を行う。
3. 閉ループ制御
 - (1) $u(t)$ の振幅は0として調整しない。位相も調整しない。
 - (2) $w(t)$ の振幅を指定値に設定し、周波数を先に測定した1次共振周波数に設定する。
 - (3) エラーマイクの信号 $z(t)$ の振幅が最小となるように補償器 $K(s)$ のゲイン G とむだ時間 τ を調整し、その結果を記録する。発振した場合は直ちに、発振前の値に戻すこと。
 - (4) 2次共振周波数についても同様に実験を行う。
4. 周波数応答実験とナイキストの安定判別
 - (1) 周波数応答実験を体験する。
 (実験機の端末にて以下入力。「%」は入力不要。何度かエンターを押す必要あり)

```
% ./run_freqresp
```

 周波数応答実験が開始する。オシロスコープを操作してスピーカの駆動信号にトリガを設定し、
 - i. 周波数が徐々に高くなっていること(耳で聴いてもわかる)
 - ii. 全ての信号の周波数が等しいこと、
 - iii. 共振周波数付近でマイクの出力信号の振幅が大きくなること、
 - iv. スピーカの駆動信号に対してマイクの出力信号の位相が回転すること
 などを確認する。
 - (2) ナイキストの安定判別と、閉ループゲインの確認
 (MATLABのコマンドプロンプトにて)

```
>> check_cl
```

実験で調整したのと同じように、ゲイン G とむだ時間 τ を調整し、ナイキスト軌跡と閉ループ系のゲイン特性がグラフに表示される。

- i. 閉ループ制御で調整したゲイン G とむだ時間 τ を指定したとき、閉ループ系は安定、という判定結果になるか、
- ii. (もし閉ループ制御で発振するギリギリまで調整していたなら) わずかにゲイン G とむだ時間 τ を変化させると、閉ループ系は不安定、という判定結果になるはず、
- iii. 閉ループゲインのグラフから一次および二次共振周波数における制御の効果 (ゲインの低減幅) を dB で読み、閉ループ制御の実験結果に近いかどうか、などを調べる。

5. ロバスト制御による広帯域騒音の抑制 (phase-delay 補償器との比較)

- (a) 手動調整した phase-delay 補償器による制御実験
(実験機にて以下のように入力)

```
% ./run_phasedelay
```

gain と delay を聞かれるので、閉ループ制御の実験で調整した値を指定する。ロバスト制御と同様に実験が開始する。

ロバスト制御との違いを考察する (高周波数域の騒音が増幅するかもしれない)。

- (b) ロバスト制御 (設計済の補償器を使用) による制御実験
(実験機にて)

```
% ./run_hinf
```

10 秒間の実験が開始する。5 秒経過後に補償器が ON になる。
オシロスコープの画面や耳で音を聴いて、妥当な結果が調べる。

- (c) ロバスト制御と phase-delay 補償器の比較
(MATLAB のコマンドプロンプトで)

```
>> compare
```

- figure(1) ... 2 つのコントローラのボード線図。違いは?
- figure(2) ... 閉ループ系のゲイン特性。制御あり / なしの違い、2 つの補償器の違いは?

```
>> compare_result
```

- figure(3) ... エラーマイク出力の時間応答 (ロバスト制御): 制御後に振幅が低減
- figure(4) ... 同上 (phase-delay 制御): 制御後に振幅が増大
- figure(5) ... エラーマイク出力のパワースペクトル密度 (ロバスト制御): 制御無しのピークが制御有りで潰れている
- figure(6) ... 同上 (phase-delay 制御): 1 次と 2 次共振周波数成分は抑制されている。閉ループゲインと同じ形状

4.4 ミニレポート

以下の課題について A4 の紙 1 枚に記載し提出しなさい (当日回収します)。

課題 1. 閉ループ制御の予想は満足いくものだったか? 満足いくものでなかった場合はその理由 (何を間違ったか) 満足いくものだった場合は、さらに改善するための方策について述べよ。

課題 2. 開 / 閉ループ制御の違いについて述べよ。

5 ロバスト制御 (旧テキストの抜粋)

本実験は PC を操作して行う。その手順の詳細については以下の URL を参照せよ:

<http://c.nagaokaut.ac.jp> 授業 3 年学生実験

5.1 はじめに

図 1 において、観測出力 y から、適切な制御入力 u の計算を行う部分は補償器 (controller) と呼ばれ、本実験装置では、PC のプログラムとして実装される。良い能動騒音制御性能を得るために、外乱入力 w が評価出力 z に与える影響をできるだけ小さくする補償器を設計することが望ましい。このような補償器を設計するための代表的な問題は、次に示す \mathcal{H}_∞ 制御問題である:

問題 1 (\mathcal{H}_∞ 制御問題) 与えられた伝達関数 $G(s)$ に対して、図 4 の閉ループ系を内部安定化し、かつ、 w から z までの伝達関数 (閉ループ伝達関数) の \mathcal{H}_∞ ノルムを最小化する補償器 $K(s)$ を求めよ。

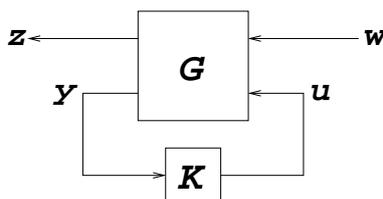


図 4: \mathcal{H}_∞ 制御問題

ここで、 $G(s)$ は一般化プラントと呼ばれる。 \mathcal{H}_∞ ノルムは、安定な伝達関数に対して次のように定義される (Bode 線図におけるゲインの最大値と理解すれば良い)。

$$\|M(s)\|_\infty := \max_{\omega} |M(j\omega)| \quad (19)$$

図 1 に対応する一般化プラント $G(s)$ がわかれば、 \mathcal{H}_∞ 制御問題を解くことにより、望ましい補償器を得ることができる。

5.2 モデリング

補償器設計を行うためには、一般化プラント $G(s)$ の情報が必要である。今、 w, u, z, y はスカラーなので、 $G(s)$ は 2×2 の伝達関数行列である。これを、

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (20)$$

と表す。本実験では、周波数応答法を用いて、これら 4 つの伝達関数を同定する。

5.2.1 周波数応答法

未知システムの伝達関数 (以下、 $M(s)$ とする) を同定するための手法の一つとして、周波数応答法がある。周波数応答法では、未知システムにある周波数 f の正弦波 $u(t)$ を入力し、その出力 $y(t)$ を観測する。未知システムの非線形性が弱く、ほぼ線形系とみなせるような場合には、出力信号 $y(t)$ も同一周波数 f の正弦波となり (図 5)、未知システムの伝達関数 $M(s)$ は、入出力信号の振幅比 (出力/入力) A と位相差 (入力に対する出力の進み) ϕ によって、

$$M(j\omega) = Ae^{j\phi} \quad (21)$$

と特徴づけられる。周波数 f を細かく変化させながら、振幅比 A と位相差 ϕ を記録し、プロットしたものが、未知システムの周波数応答であり、これを最小二乗法等を用いて近似することにより、未知システムの伝達関数 $M(s)$ を決定することができる。

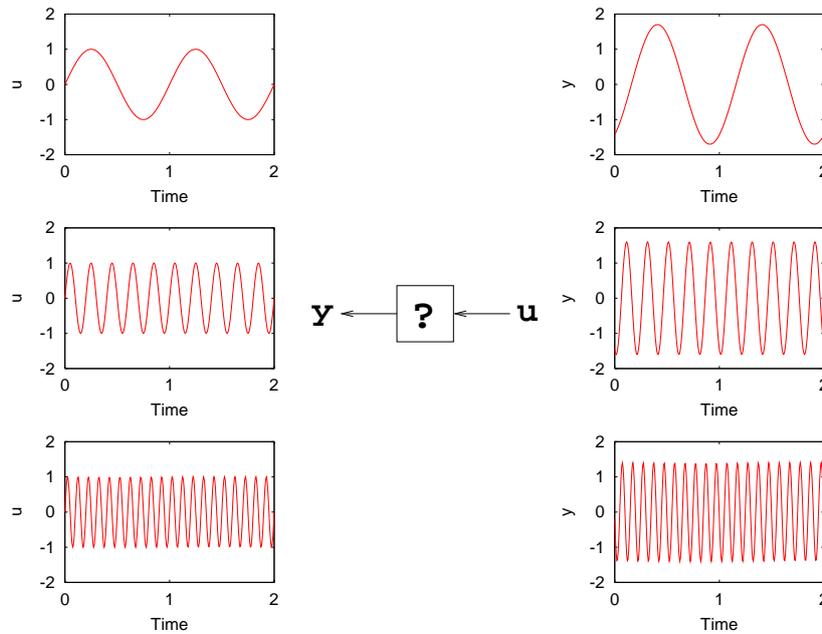


図 5: 周波数応答法

5.2.2 モデル化誤差とロバスト制御

実システムの周波数応答に完全に一致する伝達関数 — 真の伝達関数 — を求めることは現実的には不可能であり、通常、両者の間には、伝達関数に近似しきれなかった誤差 — モデル化誤差 — が存在する。このモデル化誤差を無視して、補償器を設計・実装すると、閉ループ伝達関数の \mathcal{H}_∞ ノルムが、設計時の見積もりを超えて劣化したり、最悪の場合、制御系が不安定になることがある。後者は致命的であり、この場合、消音制御系は発振し、大振幅の音が二次音源スピーカから出力されることとなる。

以降では前節の方法により求めた伝達関数を、真の伝達関数から区別するために、 $\bar{G}_{zw}(s)$, $\bar{G}_{zu}(s)$, $\bar{G}_{yw}(s)$, $\bar{G}_{yu}(s)$ と表記することにしよう。これらの伝達関数は、ノミナル伝達関数 (Nominal Transfer Function) と呼ばれる。

制御系が不安定となるのを防ぐためには、 $G(s)$ の 4 つの伝達関数のうち、フィードバックループを構成する伝達関数 $G_{yu}(s)$ のモデル化誤差を考慮して $K(s)$ を設計すれば良い。モデル化誤差の考慮の仕方は幾つかあるが、ここでは、加法的摂動モデルを用いて、モデル化誤差を考慮することにする。この場合、真の伝達関数 $G_{yu}(s)$ は、ノミナル伝達関数 $\bar{G}_{yu}(s)$ を用いて、次のように表される。

$$G_{yu}(s) = \bar{G}_{yu}(s) + W(s)\Delta(s) \quad (22)$$

ここで、右辺第二項が加法的摂動で、 $W(s)$ はその重み関数、 $\Delta(s)$ は正規化された摂動 (\mathcal{H}_∞ ノルムが 1 以下の安定な伝達関数) である。

$W(s)$ は (22) 式が有効なモデルとなるように決定されなければならない。(22) 式を $\Delta(s)$ について解き、 $|\Delta(j\omega)| \leq 1$ の条件を適用すると、

$$|G_{yu}(j\omega) - \bar{G}_{yu}(j\omega)| \leq |W(j\omega)| \quad (23)$$

を得る。すなわち、 $G_{yu}(s)$ のモデル化誤差のゲイン特性をプロットし、それを上から覆うように、 $W(s)$ を決定すれば良い。このとき、できるだけ高い制御性能を達成するために、モデル化誤差をできる限りタイトに覆うように $W(s)$ を決定する。

5.3 補償器設計

$G_{yu}(s)$ のモデル化誤差を考慮することにより、問題 1 をつぎのように書き替えることができる。

問題 2 任意の $\Delta(s) \in \text{BH}_\infty$ に対して、図 4 の閉ループ系を内部安定化し、かつ、 w から z までの閉ループ伝達関数の \mathcal{H}_∞ ノルムを最小化する補償器 $K(s)$ を求めよ。

ここで、 BH_∞ は、 \mathcal{H}_∞ ノルムが 1 以下の、安定な伝達関数の集合である。また、 $G(s)$ は、

$$G(s) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{zw}(s) & \bar{G}_{zu}(s) \\ \bar{G}_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (24)$$

で与えられる。 $G_{yu}(s)$ は (22) 式で与えられる。

このような、モデル化誤差に対するロバスト安定性と制御性能の最適化を同時に図る補償器設計問題は、ロバスト性能問題と呼ばれ、現実の制御対象に対する補償器設計問題としてよく現れる。この問題の直接的な解法は知られていないが、 \mathcal{H}_∞ 制御問題の解法を利用して補償器設計を行うことができる。

問題 2 の閉ループ系から摂動 $\Delta(s)$ を上に引き出して、 $\Delta(s)$ を取り除くと、図 6 の閉ループ系が得られる。

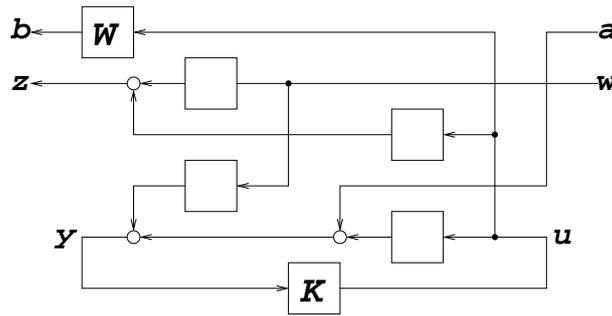


図 6: ロバスト性能問題

さらに、スケーリングと呼ばれる変数を導入することにより、 \mathcal{H}_∞ 制御問題の解法を繰り返し利用して解くことが可能な次の設計問題を得る。

問題 3 (定数スケールド \mathcal{H}_∞ 制御問題) 図 7 の閉ループ系を内部安定化し、かつ、閉ループ伝達関数のノルムを 1 未満とする補償器 $K(s)$ および正数 d を求めよ。さらに、解が存在する範囲で、正数 k を最大化せよ。

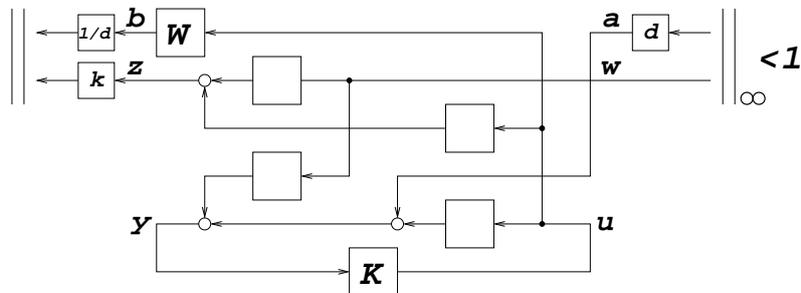


図 7: 定数スケールド \mathcal{H}_∞ 制御問題

A 理論式 (11) の導出

まず、調和振動時の管内の圧力と粒子速度の分布が、二つの任意定数により定まることを示す。よく知られているように、管の内径に比べて音波の波長が十分長いとき、管内を伝播する音波は平面波と見なすことができ、その振る舞いは圧力 $p(x, t)$ に関する 1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

に従う。この一般解は二つの方向に伝播する進行波を用いて

$$p(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_0}\right) \quad (26)$$

と書ける。ここで、 $f(\bullet)$, $g(\bullet)$ は初期状態に依存する任意の関数で、それぞれ x の正方向、負方向に伝播する進行波を表す。

演習問題 1 式 (26) が波動方程式を満たすことと、二つの進行波の方向を確認せよ。¹

スピーカを単一周波数の正弦波で駆動した場合、管内の空気は同じ周波数で調和振動する。このとき、式 (2) より、式 (26) の複素振幅は

$$\tilde{p}(x) = \tilde{A}e^{-jkx} + \tilde{B}e^{jkx} \quad (27)$$

となる。ここで、 \tilde{A} , \tilde{B} はそれぞれ x の正方向、負方向に伝播する進行波成分を表す複素数である。

演習問題 2 このことを確認せよ。

圧力と速度の関係式 (6) を用いると、圧力分布の式 (27) より、粒子速度の分布を導出できる。このことを示す前に、式 (6) を導出しておく。式 (6) は運動量保存則から導出される。これは、力 $f(t)$ を受ける質量 m の質点の場合

$$m \frac{dv(t)}{dt} = f(t) \quad (28)$$

を考えるとわかりやすい。すなわち、管内の位置 $x \sim x + \Delta x$ に長さ Δx の微小区間をとると、その質量は $\rho_0 S \Delta x$ 、位置 x の端面に右向きにかかる力は $p(x, t)S$ 、位置 $x + \Delta x$ の端面に左向きにかかる力は $p(x + \Delta x, t)S$ 、であることから、運動方程式 (28) は次のようになる。

$$(\rho_0 S \Delta x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = Sp(x, t) - Sp(x + \Delta x, t) = -S \Delta x \frac{p(x + \Delta x, t) - p(x, t)}{\Delta x} \quad (29)$$

よって、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると次式が成り立つ。

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (30)$$

演習問題 3 上式右辺に負号が入るのはなぜか。

さらに、複素振幅を考えると式 (6) を得る。

演習問題 4 このことを確認せよ。すなわち、式 (30) から式 (6) を導出せよ。

式 (6) に式 (27) を代入すると、粒子速度の分布の式

$$\tilde{v}(x) = \frac{\tilde{A}}{\rho_0 c_0} e^{-jkx} - \frac{\tilde{B}}{\rho_0 c_0} e^{jkx} \quad (31)$$

を得る。以上より、調和振動における一様な管内の圧力および粒子速度の分布を求めることは、未知定数 \tilde{A} , \tilde{B} を決定することに等しい。この結果を利用して次に、図 3 のダクトモデルにおける圧力分布を求めることを考える。

図 3 のダクトモデルには $x = x_s$ において音源（粒子速度の注入源）が設置されており、全長 L の管全体を一様な管とみなすことはできない。そこで、 $x = x_s$ の左右でダクトを二つに分け、両者において未知数を二つずつ用いて圧力および粒子速度の分布を次のようにおく。

$$\tilde{p}(x) = \tilde{A}e^{-jkx} + \tilde{B}e^{jkx}, \quad \tilde{v}(x) = \frac{\tilde{A}}{\rho_0 c_0} e^{-jkx} - \frac{\tilde{B}}{\rho_0 c_0} e^{jkx} \quad (0 \leq x \leq x_s) \quad (32)$$

$$\tilde{p}(x) = \tilde{C}e^{-jk(x-x_s)} + \tilde{D}e^{jk(x-x_s)}, \quad \tilde{v}(x) = \frac{\tilde{C}}{\rho_0 c_0} e^{-jk(x-x_s)} - \frac{\tilde{D}}{\rho_0 c_0} e^{jk(x-x_s)} \quad (x_s \leq x \leq L) \quad (33)$$

¹本資料の最後に解答例があります。

理論式導出の概要は次の通りである。まず、閉口端の境界条件 $\tilde{v}(0) = 0$ を式 (32) の $\tilde{v}(x)$ の式に代入すると、 \tilde{B} を \tilde{A} で表せる。すなわち、

$$\tilde{B} = \tilde{A} \quad (34)$$

を得る。また、開口端の境界条件 $\tilde{p}(L) = 0$ を式 (33) の $\tilde{p}(x)$ の式に代入すると、 \tilde{D} を \tilde{C} で表せる。すなわち、

$$\tilde{D} = -\tilde{C}e^{-j2k(L-x_s)} \quad (35)$$

を得る。よって、 \tilde{B} , \tilde{D} を消去して整理すると、式 (32), (33) は次式となる。

$$\tilde{p}(x) = \tilde{A}2 \cos kx, \quad \tilde{v}(x) = -\frac{\tilde{A}}{\rho_0 c_0} 2j \sin kx \quad (0 \leq x \leq x_s) \quad (36)$$

$$\tilde{p}(x) = \tilde{C}e^{-jk(L-x_s)} 2j \sin k(L-x), \quad \tilde{v}(x) = \frac{\tilde{C}}{\rho_0 c_0} e^{-jk(L-x_s)} 2 \cos k(L-x) \quad (x_s \leq x \leq L) \quad (37)$$

さらに、 $x = x_s$ において圧力が連続となる条件式 (9) より、式 (36), (37) の $\tilde{p}(x)$ に $x = x_s$ を代入したものが等しいとにおいて、

$$\tilde{A} \cos kx_s = \tilde{C}e^{-jk(L-x_s)} j \sin k(L-x_s) \quad (38)$$

を得る。また、 $x = x_s$ における粒子速度の関係式 (10) より、式 (36), (37) の $\tilde{v}(x)$ に $x = x_s$ を代入したものをを用いて、

$$-\frac{\tilde{A}}{\rho_0 c_0} 2j \sin kx_s + \tilde{v}_s = \frac{\tilde{C}}{\rho_0 c_0} e^{-jk(L-x_s)} 2 \cos k(L-x_s) \quad (39)$$

を得る。式 (38) を $\tilde{C}e^{-jk(L-x_s)}$ について解き、それを式 (39) に代入して整理すると、 \tilde{A} と \tilde{v}_s の関係式

$$\tilde{A} = \frac{j\rho_0 c_0 \sin k(L-x_s)}{2 \cos kL} \tilde{v}_s \quad (40)$$

を得る。ただし、

$$\cos kx_s \cos k(L-x_s) - \sin kx_s \sin k(L-x_s) = \cos kL \quad (41)$$

を用いた。同様に、 $\tilde{C}e^{-jk(L-x_s)}$ も \tilde{v}_s で表すことができ、

$$\tilde{C}e^{-jk(L-x_s)} = \frac{\rho_0 c_0 \cos kx_s}{2 \cos kL} \tilde{v}_s \quad (42)$$

を得る。

以上より、式 (36), (37) の \tilde{A} , \tilde{C} を \tilde{v}_s で表すと、式 (11) を得る。

(導出終わり)

B 演習問題の解答例

演習問題 1 第一項のみ示す (第二項も同様に示せる)。

$$p(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \quad (43)$$

とあくと、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{c_0}\right), \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} \frac{1}{c_0^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial p^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} \quad (44)$$

よって、波動方程式が成り立つ。

進行波の方向について、ある正数 τ 秒後の圧力分布を考えると、

$$p(x, t + \tau) = f\left(t + \tau - \frac{x}{c_0}\right) = f\left(t - \frac{x - c_0\tau}{c_0}\right) = p(x - c_0\tau, t) \quad (45)$$

すなわち

$$p(x, t + \tau) = p(x - c_0\tau, t) \quad (46)$$

が成り立つ。または等価的に

$$p\left(x, t + \frac{l}{c_0}\right) = p(x - l, t) \quad (47)$$

が成り立つ。ただし、 $l = c_0\tau$ とおいた。すなわち、 τ 秒後の圧力分布は、現在の圧力分布 $p(x, t)$ を x の正方向に $l = c_0\tau$ だけ移動した圧力分布に等しい。つまり、式 (43) は x の正の向きに伝播する進行波である。

演習問題 2 x の正方向に伝播する進行波成分の場合を考える（反対方向も同様に示せる）。式 (47) を複素振幅で表現すると次式が成り立つ。

$$\operatorname{Re}\left\{\tilde{p}(x)e^{j\omega\left(t+\frac{l}{c_0}\right)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\tilde{p}(x)e^{jkl}e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\tilde{p}(x-l)e^{j\omega t}\right\} \quad (48)$$

すなわち、

$$\tilde{p}(x)e^{jkl} = \tilde{p}(x-l) \quad (49)$$

または

$$\tilde{p}(x) = \tilde{p}(x-l)e^{-jkl} \quad (50)$$

が成り立つ。 $l = x$ を代入すると次式が成り立つ。

$$\tilde{p}(x) = \tilde{p}(0)e^{-jkl} = \tilde{A}e^{-jkl} \quad (51)$$

ただし、 $\tilde{A} = \tilde{p}(0)$ とおいた。よって式 (27) が成り立つ。

演習問題 3 $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ 、すなわち微小区間右面の圧力の方が左面の圧力よりも大きい場合、微小区間には左向き（ x が負の向き）に正の力が働くため。

演習問題 4 式 (2), (5) より次式が成り立つ。

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{Re}\left\{j\omega\tilde{v}(x)e^{j\omega t}\right\}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\partial\tilde{p}(x)}{\partial x}e^{j\omega t}\right\} \quad (52)$$

これらを式 (30) に代入すると、

$$\operatorname{Re}\left\{j\omega\rho_0\tilde{v}(x)e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{-\frac{\partial\tilde{p}(x)}{\partial x}e^{j\omega t}\right\} \quad (53)$$

すなわち、

$$j\omega\rho_0\tilde{v}(x) = -\frac{\partial\tilde{p}(x)}{\partial x} \quad (54)$$

より、式 (6) が成り立つ。

参考文献

- [1] 一宮: 機械系の音響工学, コロナ社 (1992)