2重倒立振子モデルの作り方

平成 15 年 6 月 20 日

1 倒立振子系の諸元

M	:	台車の質量
m_i	:	リンク i の全質量
l_i	:	リンク i の長さの半分
J_i	:	リンク i の重心回りの慣性モーメント
x	:	台車の位置
θ_i	:	リンク i の角度 (平衡位置を 0 とする)
F	:	台車に加わる力 (x 方向を正とする)

リンク (棒のこと) の添字 i は，台車に接続されている下部のリンクを $i=1$, 上部のリンクを $i=2$ とする．

2 Lagrange 法による運動方程式の導出

2 重倒立振子の運動方程式を導出するために，ニュートンの第 2 法則を適用することもできる．しかしここでは，導出過程の見通しをよくするために，Lagrange 方程式を用いることにする．

具体的には，系の運動エネルギ T と，ポテンシャルエネルギ V を求め，これらをつぎの Lagrange 方程式に代入することにより，系の運動方程式を得ることができる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad (i = 1, 2, ...n) \tag{1}$$

ただし，x_i は一般化座標，$\dot{x}_i$ はその時間微分 (一般化速度, 速度や角速度) である．また，F_i は，系の外から加わる x_i 方向成分の一般化力 (力やトルク) である．n は系の自由度である．

詳細な説明を省くが，2 重倒立振子の場合には，一般化座標および一般化力をつぎのように選ぶことができる:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \quad (2)\\ x_2 &= \theta_1 \quad (3)\\ x_3 &= \theta_2 \quad (4)\\ F_1 &= F \quad (5)\\ F_2 &= 0 \quad (6)\\ F_3 &= 0 \quad (7) \end{aligned}$$

これより Lagrange の方程式 (1) はつぎのように書ける:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} &= F \quad (8)\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} &= 0 \quad (9)\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} &= 0 \quad (10) \end{aligned}$$

2.1　運動エネルギー

まず，系の運動エネルギー T を求める．

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{c1}^2 + \dot{y}_{c1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_{c2}^2 + \dot{y}_{c2}^2) + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \tag{11}$$

上式右辺第一項目から順に，台車の運動エネルギー, リンク 1 の並進運動エネルギー, リンク 2 の並進運動エネルギー，リンク 1 の回転運動エネルギー, リンク 2 の回転運動エネルギー，である．ただし，$\dot{x}_{c1}$, $\dot{y}_{c1}$ は，それぞれリンク 1 の重心の x, y 方向の移動速度である．同様に，$\dot{x}_{c2}$, $\dot{y}_{c2}$ はリンク 2 の移動速度である．これらは，以下のように求まる．

リンク 1 の重心位置 (x_{c1}, y_{c1}) とその導関数：

$$x_{c1} = x + l_1\sin\theta_1 \tag{12}$$

$$y_{c1} = l_1\cos\theta_1 \tag{13}$$

$$\dot{x}_{c1} = \dot{x} + l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1 \tag{14}$$

$$\dot{y}_{c1} = -l_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1 \tag{15}$$

リンク 2 の重心位置 (x_{c2}, y_{c2}) とその導関数：

$$x_{c2} = x + 2l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 \tag{16}$$

$$y_{c2} = 2l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \tag{17}$$

$$\dot{x}_{c2} = \dot{x} + 2l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1 + l_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \tag{18}$$

$$\dot{y}_{c2} = -2l_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1 - l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2 \tag{19}$$

これらを式 (11) に代入して整理すると，つぎの式を得る．

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\big((m_1 + 4m_2)l_1^2 + J_1\big)\dot{\theta}_1^2 + (m_1 + 2m_2)l_1\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ &+ m_2l_2\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + 2m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}(m_2l_2^2 + J_2)\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \tag{20}$$

2.2　ポテンシャルエネルギー

リンクが水平に倒れた場合 $(\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2})$ に，ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー) V が 0 となると考えると，

$$V = m_1gl_1\cos\theta_1 + m_2g(2l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \tag{21}$$

右辺第一項は，リンク 1 のポテンシャルエネルギー, 第二項は，リンク 2 のポテンシャルエネルギーである．

以上で求めた T, V を，式 (8), 式 (9), 式 (10) に代入し，系の運動方程式を導出する．

2.3　式 (8)

について

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m_1 + m_2)\dot{x} + (m_1 + 2m_2)l_1\dot{\theta}\cos\theta_1 + m_2l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 + 2m_2)l_1(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2\sin\theta_1) + m_2l_2(\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2\sin\theta_2) \tag{23}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{25}$$

これより，次式を得る．

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 + 2m_2)l_1(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2\sin\theta_1) + m_2l_2(\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2\sin\theta_2) = F \tag{26}$$

2.4　式 (9) について

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_1} = \bigl((m_1+4m_2)l_1^2+J_1\bigr)\dot\theta_1+(m_1+2m_2)l_1\dot x\cos\theta_1+2m_2l_1l_2\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2) \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_1}\right) &= \bigl((m_1+4m_2)l_1^2+J_1\bigr)\ddot\theta_1+(m_1+2m_2)l_1(\ddot x\cos\theta_1-\dot x\dot\theta_1\sin\theta_1)\\ &+ 2m_2l_1l_2\bigl(\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot\theta_2(\dot\theta_1-\dot\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\bigr)\end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -(m_1+2m_2)l_1\dot x\dot\theta_1\sin\theta_1-2m_2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2) \tag{29}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -m_1gl_1\sin\theta_1-2m_2gl_1\sin\theta_1 \tag{30}$$

これより，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\bigl((m_1+4m_2)l_1^2+J_1\bigr)\ddot\theta_1+(m_1+2m_2)l_1\ddot x\cos\theta_1+2m_2l_1l_2\bigl(\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\dot\theta_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\bigr)\\ &\qquad -(m_1+2m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0\end{aligned} \tag{31}$$

2.5　式 (10) について

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_2} = m_2l_2\dot x\cos\theta_2+2m_2l_1l_2\dot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)+(m_2l_2^2+J_2)\dot\theta_2 \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_2}\right) &= m_2l_2(\ddot x\cos\theta_2-\dot x\dot\theta_2\sin\theta_2)+2m_2l_1l_2\bigl(\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot\theta_1(\dot\theta_1-\dot\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\bigr)\\ &+ (m_2l_2^2+J_2)\ddot\theta_2\end{aligned} \tag{33}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -m_2l_2\dot x\dot\theta_2\sin\theta_2+2m_2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2) \tag{34}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -m_2gl_2\sin\theta_2 \tag{35}$$

これより次式を得る．

$$m_2l_2\ddot x\cos\theta_2+2m_2l_1l_2\bigl(\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot\theta_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\bigr)+(m_2l_2^2+J_2)\ddot\theta_2-m_2gl_2\sin\theta_2=0 \tag{36}$$

式 (26), 式 (31), 式 (36) をまとめて，系の運動方程式が次のように得られる．

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} M+m_1+m_2 & (m_1+2m_2)l_1\cos\theta_1 & m_2l_2\cos\theta_2\\ (m_1+2m_2)l_1\cos\theta_1 & (m_1+4m_2)l_1^2+J_1 & 2m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\ m_2l_2\cos\theta_2 & 2m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & m_2l_2^2+J_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot x\\ \ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{bmatrix}\\ &\qquad = \begin{bmatrix} F+(m_1+2m_2)l_1\dot\theta_1^2\sin\theta_1+m_2l_2\dot\theta_2^2\sin\theta_2\\ (m_1+2m_2)gl_1\sin\theta_1-2m_2l_1l_2\dot\theta_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\\ m_2gl_2\sin\theta_2+2m_2l_1l_2\dot\theta_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{37}$$

2.6　線形モデルの導出

(37) 式の連立微分方程式には，$\cos\theta_1$, $\dot\theta_1^2$ 等の，非線形項 (θ_1, $\dot\theta$ 等について線形でない項) が含まれており，このままでは，制御系の安定性を解析したり，補償器の設計を行うことは困難である．そこで，適当な条件のもとで，(37) 式を線形化する．

倒立振子系を制御する目的は，振子を倒立させること，すなわち，振子の角度および角速度を，平衡点

$$\theta_1=0,\quad \theta_2=0,\quad \dot\theta_1=0,\quad \dot\theta_2=0$$

に近付けることである．制御がうまくいっている場合には，振子は平衡点の近傍で運動するはずなので，平衡点まわりで (37) 式を十分な精度で近似しておけば，制御用モデルとして使うことができそうである．そこで，$\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ が上記平衡点近傍にあると仮定して，(37) 式を線形近似すると次式を得る．

$$\begin{bmatrix} M+m_1+m_2 & (m_1+2m_2)l_1 & m_2l_2 \\ (m_1+2m_2)l_1 & (m_1+4m_2)l_1^2+J_1 & 2m_2l_1l_2 \\ m_2l_2 & 2m_2l_1l_2 & m_2l_2^2+J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ (m_1+2m_2)gl_1\theta_1 \\ m_2gl_2\theta_2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

ここで，以降の導出を簡単にするために，上式を次のように表すことにする．

$$M_0\ddot{z} = A_0z + B_0F \tag{39}$$

ただし，

$$\begin{aligned} M_0 &:= \begin{bmatrix} M+m_1+m_2 & (m_1+2m_2)l_1 & m_2l_2 \\ (m_1+2m_2)l_1 & (m_1+4m_2)l_1^2+J_1 & 2m_2l_1l_2 \\ m_2l_2 & 2m_2l_1l_2 & m_2l_2^2+J_2 \end{bmatrix}, \\ A_0 &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1+2m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2gl_2 \end{bmatrix}, \quad B_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z := \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{40}$$

である．

2 階の微分方程式 (38) を 1 階に直すのは，行列のサイズを拡大 (2 倍) にするだけで簡単にできて，

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M_0^{-1}A_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M_0^{-1}B_0 \end{bmatrix} F \tag{41}$$

となる．

以上で，倒立振子の運動方程式が一階線形連立微分方程式の形で求まった．