ゲインスケジューリング手法を利用した
構造を持つ補償器の設計法と
その超音波モータ制御への応用

小　林　泰　秀

要旨

本論文では，ゲインスケジューリング制御系の設計手法を利用することにより，構造を持つ補償器を得るための手法を提案している．さらに，超音波モータ制御に応用することにより，提案手法の有効性の検証を行っている．

現実の制御対象に対して制御系の設計を行う場合には，設計面と実装面においてつぎのことが要求される:(設計面) より高い制御性能を得るために，現実の制御対象にできるだけ近いモデルと，望ましい制御特性をできるだけ正確に表した設計仕様を用いて，保守性の低い補償器設計を行うこと．(実装面) そのような保守性の低い設計を行った場合でも実装が容易な補償器を得ることができること．これらの要求に対して従来，設計面ではゲインスケジューリング制御系の設計手法が用いられてきた．これは，一般化プラントが LPV や LFT システムとして表現された場合に，補償器にも LPV や LFT の構造を持たせることによって保守性の低い設計を行うというものである．一方，実装面では得られた補償器の低次元化や，低次の補償器を直接設計することが行われてきた．

しかし，ゲインスケジューリング制御系の設計手法を用いて保守性の低い設計を行った場合に，必ずしも制御性能が改善されるという保証はない．また，ゲインスケジューリングを実機へ応用した例の報告はまだ少なく，実際に応用した場合に生じる問題点を把握することは実用上重要であると考えられる．また実装面においては，補償器実装の容易さは補償器の次数だけで決定されるとは限らない．

本論文では，設計面と実装面の要求を満たすために，補償器の構造に注目した設計手法を提案している．まず設計面においては，近年ニューアクチュエータとして注目されている超音波モータを制御対象に選び，回転速度制御上の課題をモデルと設計仕様の 2 側面で整理し，それぞれの課題に対してゲインスケジューリング手法を用いた従来の制御系設計を行う場合の問題点を明らかにしている．つぎにこの問題点を解決する構造を持つ補償器設計手法を提案し，実験により提案手法の有効性を検証している．さらに，実装面を考慮したより一般的な補償器設計手法を提案し，補償器の構造を利用すると実際に補償器の実装が容易に行えることを示している．

本論文の構成はつぎの通りである．

第 1 章では本論文の背景と目的および本論文の概要について述べている．

第 2 章では，超音波モータの制御上の問題点と制御系設計に要求される課題を明らかにしている．これに対して従来の手法を用いて制御系設計を行う際の問題点を検討し，本論文の動機付けを行なっている．

第 3 章では，パラメータ推定に誤差を伴う状況を考え，ロバスト性能を達成するゲインスケジューリング補償器の設計法を提案している．プラントのパラメータが有界で，その推定値が補償器側で利用で

きる場合には，推定誤差に応じて端点を切り詰めたパラメータ推定値を補償器側で利用することにより，保守性の低い設計を行うことができることを示す．ここでの結果は，パラメータを利用しないロバスト制御とパラメータの真値を利用する従来のゲインスケジューリングの中間の結果を自然な形で与えている．

第 4 章では，第 3 章の結果を用いて超音波モータの非線形特性を陽に考慮した高精度な回転速度制御系を設計している．そのために，ステータのセンサ電圧からプラントのゲインを推定できることを利用し，超音波モータの非線形特性を表現するプラントモデルを提案している．また，回転速度制御実験を行い提案手法の有効性を検証している．

第 5 章では，超音波モータの回転速度変動がロータの回転にほぼ同期していることに注目し，修正繰返し制御に基づく回転速度制御系を構成する．実験を行い $\mathcal{H}_\infty$ 制御系と制御性能を比較することにより，提案する制御系の有効性を検証している．

第 6 章では，第 5 章の結果をさらに向上させるために，周期外乱抑制制御系に対する保守性の低い設計を行うことを考えている．まず，修正繰返し制御系設計の保守性を低減させるために，むだ時間要素の LFT の構造を持つ補償器を仮定してゲインスケジューリング制御系の設計手法を適用すると，周期外乱を抑制する性能が劣化する場合があることを例題を用いて指摘している．これに対して，むだ時間要素を含む重み関数を用いた周期外乱抑制制御系の設計手法を提案し，保守性の低い設計を行っても制御性能が劣化しないことを示している．また，シミュレーションおよび超音波モータの速度制御実験を行い，提案手法の有効性を検証している．

第 7 章および第 8 章では，実装面を考慮したより一般的な補償器設計手法の検討を行っている．

第 7 章では，一般化プラントが安定なサブシステムを持つ場合に，次数は従来のフルオーダの設計を行う場合と同一だが，安定なサブシステムを陽に持つ構造の補償器が得られることを示している．応用例として離散時間入力むだ時間系の場合にシミュレーションを行い，提案手法の補償器の構造を用いると実際に補償器実装時の計算時間が短縮されることを確認している．

第 8 章では，連続時間むだ時間系設計の保守性を低減させるために，むだ時間要素を有限次元近似し，かつ，補償器の構造を近似誤差の LFT と仮定する場合の補償器設計手法を検討している．まず従来の設計では実装困難な補償器しか得られないことを指摘している．これに対して，むだ時間要素の入力が観測可能である場合に，むだ時間要素と有限次元システムから構成される実装可能な補償器を得るための手法を提案している．また，実際に入力むだ時間系に対してシミュレーションを行い，有限次元近似の精度を向上させていくと，制御性能が向上することを示している．

第 9 章では，本論文で得られた結果を総括している．

目 次

第 1 章　緒論 **15**
1.1　背景 15
1.2　目的 20
1.3　本論文の構成と概要 22

第 2 章　超音波モータの制御系設計上の課題 **25**
2.1　超音波モータの概要 25
2.2　非線形特性への対処法と課題 26
2.3　周期的な回転速度変動への対処法と課題 29

第 3 章　パラメータ推定誤差を考慮したゲインスケジューリング補償器の設計 **33**
3.1　緒言 33
3.2　パラメータのモデル 34
3.2.1　従来手法の問題点 34
3.2.2　パラメータモデルの提案 36
3.3　問題設定 37
3.4　補償器の設計 39
3.4.1　補償器の存在条件 39
3.4.2　補償器の構築 42
3.4.3　α を用いた実装時の調整 43
3.5　パラメータモデルの拡張 45
3.5.1　双一次関数の導入 45
3.5.2　応用例および数値例 47
3.6　結言 48

第 4 章　ゲインスケジューリングに基づく超音波モータの回転速度制御 **49**
4.1　緒言 49
4.2　実験装置 49
4.3　モデリング 50

4.3.1 閉ループ周波数応答実験 50
4.3.2 センサ電圧に依存しないプラントモデルの導出 52
4.3.3 センサ電圧に依存するプラントモデルの導出 53
4.4 補償器の設計 54
4.4.1 $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の設計 55
4.4.2 ゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の設計 55
4.4.3 補償器のゲイン特性の比較 57
4.5 実験結果 58
4.5.1 定速度制御実験 58
4.5.2 高速と低速を繰返す目標速度に対する速度制御実験 61
4.5.3 負荷トルク変動を受ける場合の定速度制御実験 62
4.6 結言 62

第 5 章 修正繰返し制御に基づく超音波モータの回転速度制御 65
5.1 緒言 65
5.2 実験装置 65
5.3 モデリング 66
5.4 補償器の設計 68
5.4.1 $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の設計 68
5.4.2 修正繰返し補償器の付加 69
5.4.3 感度関数解析に基づく修正繰返し補償器の効果 70
5.5 実験結果 70
5.6 結言 73

第 6 章 周期外乱抑制制御系設計の保守性低減法とその超音波モータの定速度制御への応用 75
6.1 緒言 75
6.2 修正繰返し制御系設計における保守性低減の効果 76
6.2.1 ロバスト性能問題 76
6.2.2 μ 設計に基づく修正繰返し制御系設計 77
6.2.3 ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系設計 78
6.3 修正繰返し制御系設計問題とその解法 79
6.3.1 修正繰り返し制御系設計問題 79
6.3.2 ゲインスケジューリング手法の適用 80
6.4 主要な結果 82
6.5 むだ時間を含む重み関数に基づく設計 88
6.5.1 ロバスト性能問題 89

6.6 従来手法と提案手法の比較 89
6.6.1 感度特性の比較 90
6.6.2 シミュレーション 90
6.7 超音波モータの定速度制御への応用 92
6.7.1 モデリング 92
6.7.2 実験結果 92
6.8 結言 94

第 7 章 一般化プラントの状態を生成するシステムを陽に持つ補償器の設計 97
7.1 緒言 97
7.2 問題設定 98
7.3 主要な結果 100
7.3.1 等価な問題 100
7.3.2 仮定の物理的意味と仮定が成立する一般化プラントの例 103
7.4 従来の手法との関連 105
7.5 設計時の計算量の低減 107
7.6 実装時の計算量の低減 108
7.6.1 補償器実装の方法 109
7.6.2 計算量の比較 110
7.6.3 シミュレーション 111
7.7 ゲインスケジューリング手法を適用する場合への拡張 112
7.7.1 問題設定 112
7.7.2 等価な問題 115
7.7.3 周期外乱抑制制御系設計への応用 117
7.8 結言 118

第 8 章 有限次元近似とゲインスケジューリングに基づくむだ時間系に対する補償器の設計 119
8.1 緒言 119
8.2 むだ時間を用いた制御系設計 120
8.3 問題設定 122
8.4 主要な結果 123
8.4.1 等価な問題 124
8.4.2 ゲインスケジューリング手法の適用 127
8.5 むだ時間要素を LFT 表現するための一手法 130
8.5.1 乱数を用いた探索 131
8.5.2 LMI を用いた探索 132

8.6 数値例 132
8.7 結言 134

第 9 章 結論 **135**

参考文献 **142**

付 録 A 第 6 章 の定理の証明 **143**
A.1 定理 6.1 の証明 143
A.2 命題 6.1 の証明 147
A.3 命題 6.2 の証明 148

付 録 B 第 7 章 の定理の証明 **149**
B.1 定理 7.1 の証明 149
B.2 一部の状態が観測出力に含まれる場合の低次元補償器の設計 [1] 150
B.3 状態とパラメータ出力の一部が観測出力に含まれる場合の低次元補償器の設計 151

関連する研究業績 **153**

謝辞 **155**

図 目 次

1.1 Closed-loop System 15
1.2 Relationship between Control Performance and Complexity of Plant Models 16
1.3 Relationship between Control Performance and Complexity of Control Specifications . 18
1.4 Relationship among Control Performance and Complexity of Plant Models and Control Specifications 19
1.5 Basic Concept of the Thesis 21
1.6 Relations among the Chapters 22

2.1 Ultrasonic Motor 25
2.2 Slowdown of Rotational Speed (Open Loop) 26
2.3 Periodic Fluctuation in Rotational Speed (Open Loop) 26
2.4 Frequency Response of Plant (dot : measured, line : nominal plant model) 27
2.5 Relationship between Sensor Voltage v_s and Plant Gain (dot : measured, line : $|k(v_s)P_0(j\omega)|$ 27
2.6 Gain Characteristic of Modeling Error 28
2.7 Relationship between Sensor Voltage v_s and Plant Gain (dot : measured, line : $k(v_s)P_0(j\omega)$, dashed-line : $P_0(j\omega)$ 29
2.8 Worst-case Sensitivity Gain 30

3.1 Control System for Illustration 35
3.2 Performance Criteria γ for Each α 35
3.3 Relationship between θ_p and θ_e 36
3.4 Range of θ_p Corresponding to $\theta = -1/2, 0, 1/2$ 37
3.5 Closed-loop System with Parameter Dependent Controller 38
3.6 Performance Criteria γ for Each α: $(\alpha_Z, \alpha_K) = (\alpha, \alpha)$, $(0.5, \alpha)$, $(0.5, 0.5)$, $\alpha_p = \alpha$ . . . 45
3.7 Relationship between θ and θ_p under a Bilinear Transformation ($\beta = -1/2$, $\alpha = 1/3$) . 46
3.8 Modification of Plant Corresponding to Bilinear Transformation 46
3.9 Range of θ_p Corresponding to $\theta = -1, 0, 1$ 47
3.10 Parameter Models for N', G', P' 47

4.1 Block Diagram of Experimental Apparatus 51

4.2 Average Rotational Speed vs Driving Frequency 51
4.3 Closed-loop System 51
4.4 Frequency Response of Plant (dot : measured, line : nominal plant model) 53
4.5 Relationship between Sensor Voltage v_s and Plant Gain (dot : measured, line : gain factor $k(v_s)$ 53
4.6 Model Uncertainty (dots) and Weighting Function (line) 55
4.7 Generalized Plant for $\mathcal{H}_\infty$ Control System 56
4.8 Constant Scaled $\mathcal{H}_\infty$ Control Problem (Gain Scheduling) 57
4.9 Gain Characteristic of Controllers (solid line: $\mathcal{H}_\infty$ controller, broken line: gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controller; from top, $\theta = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$) 58
4.10 Time Response of Rotational Speed for Constant Reference Speed (without load) . . . 59
4.11 FFT analysis of Rotational Speed in Fig. 4.10 59
4.12 Time Response of Sensor Voltage for Constant Reference Speed (without load) 59
4.13 Time Response of Rotational Speed for Constant Reference Speed (without load) . . . 60
4.14 FFT Analysis of Rotational Speed in Fig. 4.13 60
4.15 Time Response of Sensor Voltage for Constant Reference Speed (without load) 60
4.16 Time Response of Rotational Speed for Trapezoidal Reference Speed (with 0.2Nm load) 61
4.17 Time Response of Tracking Error (with 0.2Nm load) 62
4.18 Time Response of Sensor Voltage for Trapezoidal Reference Speed (with 0.2Nm load) 62
4.19 Time Response of Gain Scheduled $\mathcal{H}_\infty$ Control System with Load Variation 63

5.1 Experimental apparatus of speed control system 66
5.2 Driving frequency vs rotor speed(average) 66
5.3 Feedback system 67
5.4 Frequency response of USM 68
5.5 Model uncertainty and weighting function 68
5.6 Constant scaled $\mathcal{H}_\infty$ control problem 69
5.7 Repetitive control system 70
5.8 Gain of low-pass filter $F(s)$ and $1 + G(s)$ 71
5.9 Gain of Sensitivity Transfer Function 71
5.10 Time response of rotational speed 72
5.11 FFT analysis of rotational speed 72
5.12 Rotational speed(40 deg) 73
5.13 Rotational speed(3 rps) 73

6.1 Robust Performance Problem for Modified Repetitive Control System 76

6.2 μ Synthesis Ploblem 78
6.3 Worst-case Sensitivity Gain 78
6.4 Modified Repetitive Control System 80
6.5 Equivalent Closed-loop System 81
6.6 Gain Scheduling 81
6.7 Worst-case Sensitivity Gain 86
6.8 Robust Performance Problem with Delay Involved Weight Function 89
6.9 Worst-case Sensitivity Gain (Proposed method) 90
6.10 Worst-case Sensitivity Gain (Comparison with proposed and current methods) 90
6.11 Time Response of Disturbance 91
6.12 Time Response of Measured Output y 91
6.13 Time Response of Measured Output y 91
6.14 Frequency Response of Plant (dot : measured, line : nominal Plant Model) 92
6.15 Model Uncertainty (dots) and Weighting Function (line) 92
6.16 Time Response of Rotational Speed for Constant Reference Speed (without load) . . . 93
6.17 Time Response of Control Input(wighout load) 93
6.18 Time Response of Measured Output y for Ramp Disturbance 95
6.19 Gain Characteristic of Controller 95
6.20 FFT Analysis of Rotational Speed in Fig. 4.10 96

7.1 Closed-loop System 98
7.2 Generalized Plant with Stable System 100
7.3 Structure of Controller 101
7.4 Generalized Plant with Pre-Inserted Stable Element 104
7.5 Evaluation of Control Input 104
7.6 Generalized Plant with Post-Inserted Stable Element 105
7.7 Mixed Sensitivity Problem 105
7.8 Computational Time vs n_0 112
7.9 Gain Scheduling 113
7.10 Closed-loop System 113
7.11 Generalized Plant with Stable System 115
7.12 Structure of Controller 117

8.1 Gain of Weighting Function 121
8.2 Finite Dimensional Approximation of Delay 123
8.3 Equivalent Closed-loop System 124

8.4 Closed-loop System with Delay 126
8.5 Gain Scheduling 127
8.6 Control System of Plant with Input Delay 133
8.7 Advantage of $m_{11}(s) \neq 0$ 133
8.8 Step Disterbance Response (proposed method) 134
8.9 Step Disterbance Response (solid line: proposed method, broken line: current method) 134

表 目 次

7.1 Estimated Computational Cost for Controller Synthesis 108
7.2 Estimated Computational Cost for Controller Implementation (General Case) 111
7.3 Estimated Computational Cost for Controller Implementation (Input Delay Systems Case) 111

8.1 Coefficients of $m_{11}(s)$ and $m_{12}(s)$, and γ_{opt} 133

9.1 Current and proposed method corresponded to problems of USM 135

第1章　緒論

1.1　背景

制御工学の主たる目的は，

- 与えられた現実の制御対象 P に対して，
- Fig. 1.1 のフィードバック制御系が望ましい性質を持つ

ような補償器 K を系統的に設計・実装することである．ここで望ましい性質とは，制御系が安定であることはもちろん，外乱抑制性能が高いことや目標値応答特性が優れていることなどである．ただし，d は外乱，r は目標値信号，y は観測出力，u は制御入力である．

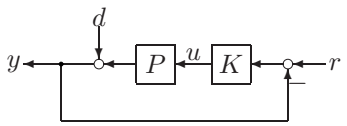


Fig. 1.1: Closed-loop System

この目的を達成するために制御工学は，

1. 制御対象のモデル
2. 制御系の設計仕様

の 2 つの方向において，

既存の制御理論の実システムへの応用 →問題点の発見 →新しい制御理論の開発

というステップを繰返して発展してきた．その結果，現実に近いより複雑な制御対象のモデルおよび制御系の設計仕様を用いて保守性 (conservativeness) の低い設計を行い，より高い制御性能を達成可能な補償器を得ることができるようになってきた．しかし，制御対象のモデルもしくは制御系の設計仕様を複雑にしていくにつれて，一般に，補償器の実装は困難になってくる．よって，補償器を得るための枠組は，複雑なモデルと設計仕様を扱えることに加えて，

3. 実装が容易な補償器

を与えるようなものであることが実用上求められる．

例えば，$\mathcal{H}_\infty$ 制御を出発点として 1. 制御対象のモデルと 2. 制御系の設計仕様の 2 つの観点から制御工学の発展を考えると，Fig. 1.2, Fig. 1.3 の 2 つの図を書くことができる．すなわち，Fig. 1.2 より，制御対象のモデルの複雑度が高くなるほど設計の保守性が低減され，その結果高い制御性能が得られる．また，Fig. 1.3 より，制御系の設計仕様の複雑度が高くなるほど設計の保守性が低減され，その結果高い制御性能が得られる．この発展の様子を以下に述べる．ただし議論を簡単にするため，これら 2 つの図における縦軸の「制御性能」として Fig. 1.1 の閉ループ系の外乱抑制性能を考える．

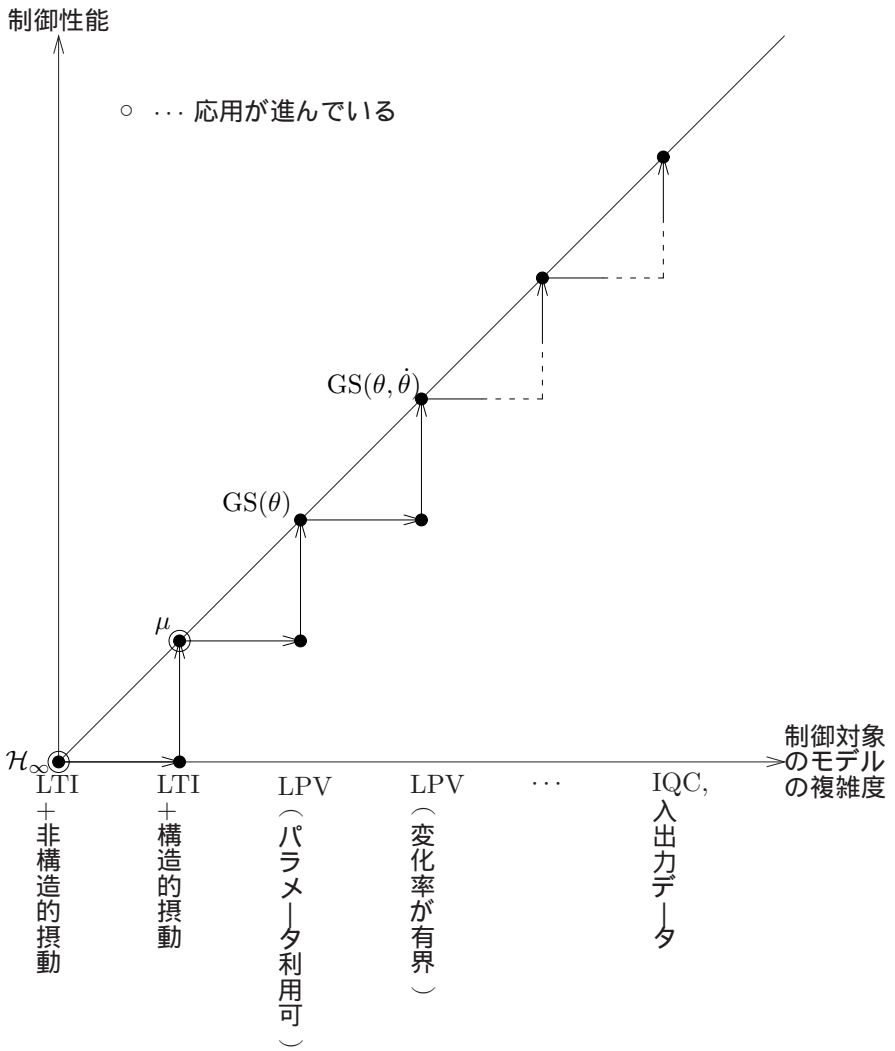


Fig. 1.2: Relationship between Control Performance and Complexity of Plant Models

$\mathrm{GS}(\theta)$: ゲインスケジューリング
$\mathrm{GS}(\theta, \dot{\theta})$: パラメータの変化率に依存するゲインスケジューリング

制御対象のモデルにおける制御工学の発展 (**Fig. 1.2**)　典型的な $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題である混合感度問題の場合には，制御対象のモデルとして乗法的摂動を持つプラントモデルが考えられる．この場合，ノミナルプラントと実際のプラントとのずれを覆うように乗法的摂動の重みを設定すれば，実際のプラントに対する制御系のロバスト安定性を保証することができる．しかし，乗法的摂動を持つプラントモデルでは，摂動のクラスとしてボール集合を考えているため，構造を持つ摂動を扱うことはできない．一方，例えば，プラントが機械要素であり，質量, 減衰, ばね定数といった物理パラメータに不確かさが存在する場合には『摂動』を表現するためにパラメータの数分のボール集合が必要となる．すなわち，この場合には構造を持つ摂動を考えなくてはならない．このような場合には，$\mathcal{H}_\infty$ 制御に基づく設計を行なうと，保守的な結果となる．この保守性を低減するため，構造化特異値 μ[2] に基づく設計手法が提案され，その結果 $\mathcal{H}_\infty$ 制御より高い制御性能を得ることができるようになった．$\mathcal{H}_\infty$ 制御, μ 設計を応用した例は数多く報告されており [3], これらの制御理論は十分実用レベルに達したと考えられる．一方，現実の制御対象の中には，μ 設計を適用しても保守性の強い設計となる対象が含まれる．パラメータ変動をともない動特性が大きく変化するような制御対象はその例である．このような制御対象を扱うために，制御対象が持つパラメータを補償器側で正確に利用できるという仮定のもとでゲインスケジューリングが提案された [4]．この手法を用いれば，パラメータに依存する補償器を得ることができ，保守性の低い設計が可能となる[1]．設計の保守性をさらに低減させるために，パラメータの変化率に依存した設計手法の研究 [5] や，より広い制御対象を統一的に扱う IQC(Integral Quadratic Constraint) の研究 [6], 制御対象の入出力データを用いて補償器とモデルを同時に設計する研究 [7] なども行われている．

以上のように，より高い制御性能を得るために，より現実に近い複雑なモデルを用いて保守性の低い設計が行われるようになってきた．

制御系の設計仕様における制御工学の発展 (**Fig. 1.3**)　混合感度問題における制御系の設計仕様は，制御系の内部安定性および，重みづけされた感度関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの最小化である．この場合，感度を低く抑えたい周波数帯域において，重み関数のゲインが大きくなるように設定しておけば，混合感度問題を解くことにより，感度特性の整形を行なうことができる．ただし，整形することができるのはノミナル感度特性のみであり，プラントの摂動が変化した場合の感度特性，例えば最悪感度特性を整形することはできない．このような場合には，感度の評価を行う部分に仮想的な摂動を接続し，ブロック数が一つ増えた構造的摂動を持つ系に対して μ 設計を行えば，所望の性能は過不足なく達成される [2]．一方，μ 設計を行なっても，十分な制御性能を得ることができない場合がある．例えば，モータなどの回転機械などではロータの回転に同期した周期外乱が発生することが多い．このような回転同期の外乱の抑制を行なう場合には，全周波数帯域で制御系の感度を小さくする必要はなく，回転周波数の整数倍の周波数において感度が小さくなっていればよい．このような周期的な外乱を重点的に抑制するための制御方式として繰返し制御が提案された [8]. さらに，むだ時間の変化率に依存するゲインスケジューリング補

[1] ここでの「パラメータ」はダイナミクスを持たない時変摂動であり，定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に帰着して補償器の設計が行われている『パラメータ』が非線形要素や無限次元要素などの場合にも，同じ設計問題を用いて補償器の設計を行うことができるので，本論文では，そのような設計問題に帰着して補償器設計を行う手法をゲインスケジューリング手法と呼ぶ．

償器の設計手法 [9] を用いれば，時変周期の外乱抑制を行なうことができる．また，複数の設計仕様を同時に考慮する多目的制御系の研究 [10] も行われている．

以上のように，より高い制御性能を得るために，実際の希望により近い複雑な設計仕様を用いて保守性の低い設計が行なわれるようになってきた．

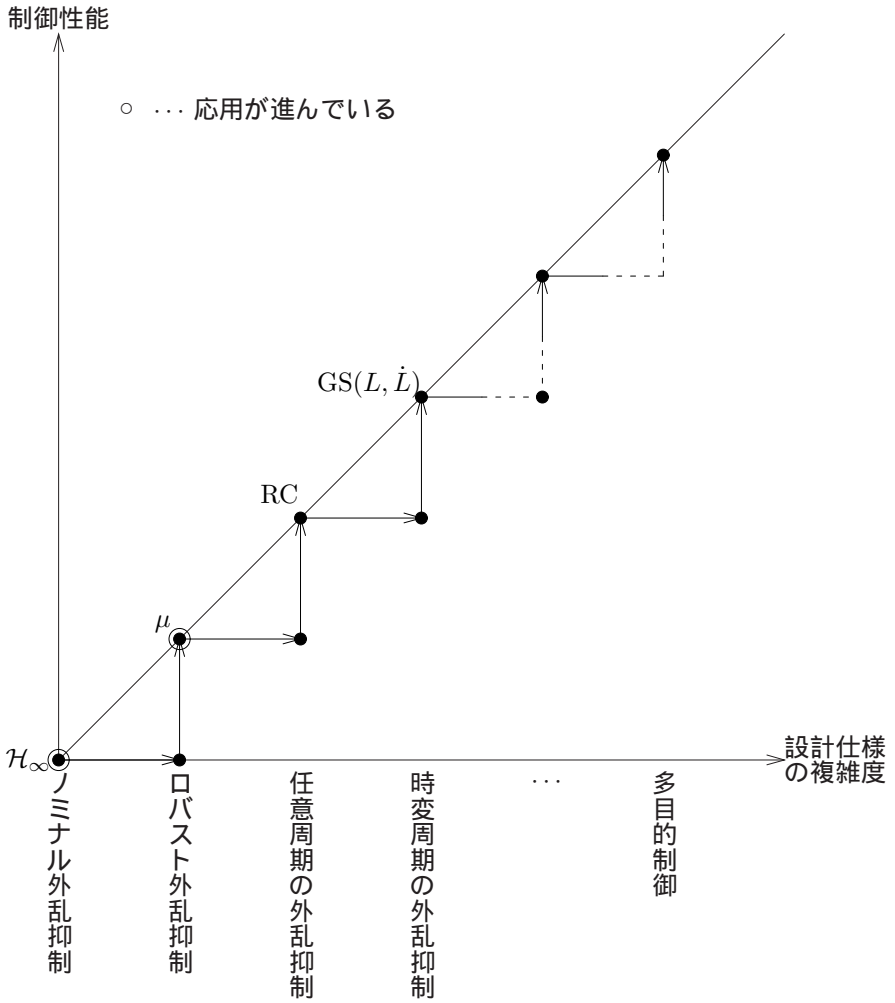


Fig. 1.3: Relationship between Control Performance and Complexity of Control Specifications

RC : 繰返し制御
GS($L, \dot{L}$) : むだ時間の変化率に依存するゲインスケジューリング

ここまでみてきたように制御工学は，制御対象のモデルと制御系の設計仕様の 2 つの方向において発展してきた．その結果，現実に近いより複雑な制御対象のモデルとより複雑な設計仕様を用いて保守性の低い設計を行い，より高い制御性能を達成可能な補償器を得ることができるようになってきた．さらに，複雑な制御対象のモデルと制御系の設計仕様を組み合わせることにより，どちらか一方が単純な場合に比べて高い制御性能を得ることができる．この様子を Fig. 1.4 に示す．

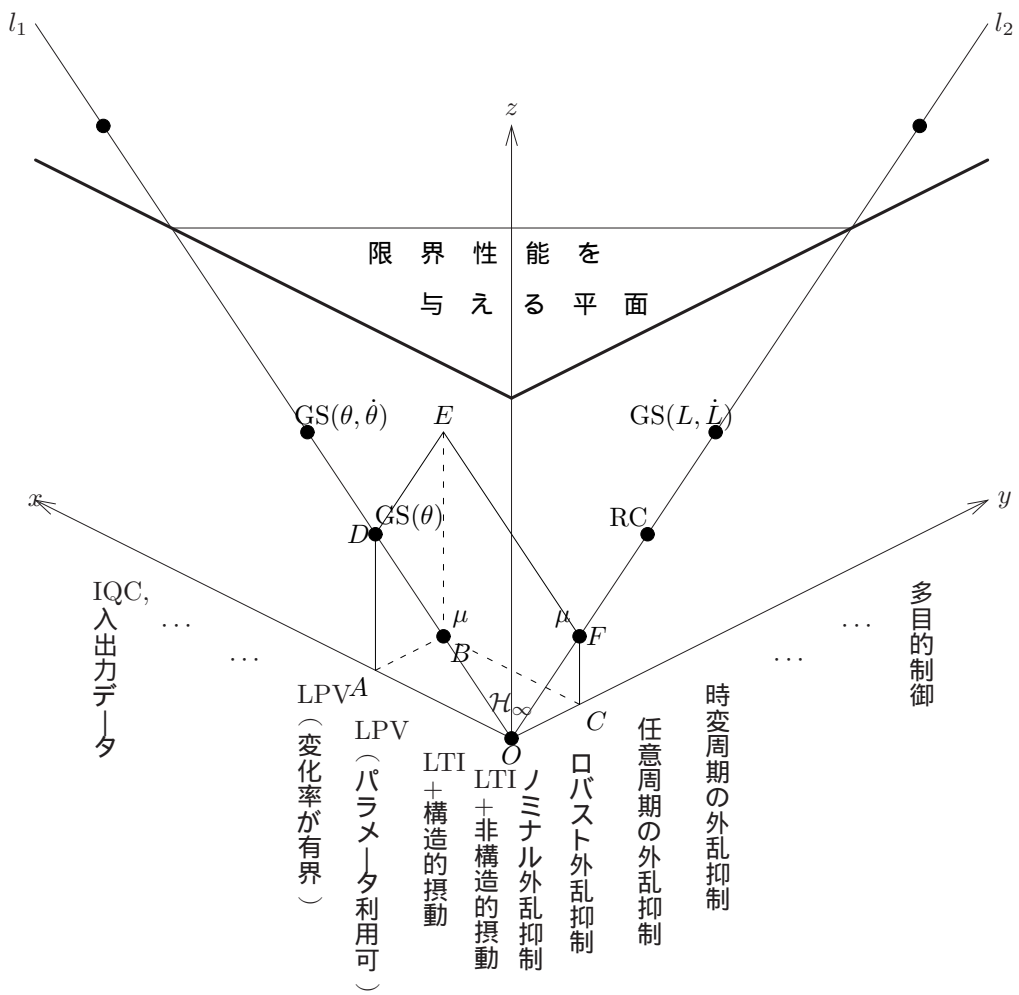


Fig. 1.4: Relationship among Control Performance and Complexity of Plant Models and Control Specifications

この図はモデルの複雑度 (x 軸)，設計仕様の複雑度 (y 軸), 制御性能 (z 軸) の関係を立体的に表している．
直線 l_1 は x-z 平面上にあって，Fig. 1.2 の関係を表している．同様に，直線 l_2 は y-z 平面上にあって，Fig. 1.3 の関係を表している．
モデルや設計仕様が単純でも，これらを組み合わせるとより高い制御性能が得られる．たとえば，モデルの複雑度が A 点「LPV(パラメータ利用可)」で，設計仕様が C 点「ロバスト外乱抑制」の場合の制御性能 $\overline{BE}$ (B は x-y 平面上の点 E は直線 l_1, l_2 を含む平面上の点) は，設計仕様だけが O 点「ノミナル外乱抑制」の場合の制御性能 $\overline{AD}$ よりも高い．同様に，モデルだけが O 点「LTI+非構造的摂動」の場合の制御性能 $\overline{CF}$ よりも高い．ただしこの図では，組み合わせ後の制御性能を，組み合わせる前の制御性能の和で表している ($\overline{BE} = \overline{AD} + \overline{CF}$).
現実的に達成可能な制御性能には限界がある (太線)．よって，より複雑なモデルと設計仕様を用いて保守性の低い設計を行うことだけでなく，限界を引き上げる工夫も重要である．

しかし，制御対象のモデルと制御系の設計仕様が複雑になっていくにつれて，一般に，補償器の次数や実装時の計算量が増加するため，補償器の実装は困難になってくる．たとえば最近では，計算器の高速化・低価格化が進み，補償器をディジタル実装することが一般的となってきているが，この場合には，補償器が実装される計算機の計算能力にはハードウェアから決まる限界がある．よって，制御対象のモデルと制御系の設計仕様を複雑にして設計の保守性を低減させていけばいくらでも制御性能が向上されるというわけではなく，達成可能な制御性能には計算機の計算能力と補償器の設計法から決まる限界が存在する (Fig. 1.4 の「限界性能を与える平面」).

この限界を緩和し，よりよい制御性能を得るためには，より高い計算能力を持つハードウェアに変更するか，もしくは，より少ない計算量で補償器の実装が行なえるように補償器設計法を改良するかのいずれかが考えられる．前者の方法を用いると制御系設計・実装のコストが高くなる．一方，後者の方法ではコストの問題は生じない．よって，より複雑な制御対象のモデルと制御系の設計仕様を扱うという方向に加えて，より少ない計算量で補償器の実装を行なうという方向においても，制御工学が発展することが実用上重要である．

補償器実装時の計算量には，補償器の次数が支配的である．そこで，補償器実装時の計算量を低減させるために，平衡実現による補償器の低次元化 [11] や，LMI の解から構成される行列のランク最小化を行い低次元の補償器を得る手法 [12], 一般化プラントの状態の一部が観測出力に含まれる場合にその次数分低次の補償器を設計する手法 [1] など，補償器の次数に注目した手法が提案されてきた．

一方，補償器の次数が同じである場合でも，補償器の構造を利用することにより，実装が容易になる場合がある．例えば，離散時間の繰返し制御系の場合には，むだ時間を L, サンプリング時間を T としたとき，L/T 分の次数の離散時間むだ時間要素が必要となる．よって，むだ時間がサンプリング時間に比べて長くなると，補償器全体の次数が高くなる．しかし，離散時間むだ時間要素はシフト演算のみを用いて実現できるため，補償器全体の次数が高い場合でも，その実装は容易である．

1.2　目的

以上みてきたように，現実の制御対象に対して補償器の設計・実装を行うために，補償器設計手法にはつぎのことが要求される:

- 設計面: 高い制御性能を得るために，
  - 現実の制御対象にできるだけ近いモデル
  - 望ましい制御特性をできるだけ正確に表した設計仕様

  を用いて，保守性の低い設計を行なう
- 実装面: 実装が容易な補償器を得る

これらの要求にこたえるために，設計面では従来，ゲインスケジューリング手法を初めとする補償器設計が行われてきた．また，実装面では，得られた補償器の低次元化や，直接低次の補償器を設計することが行われてきた．

しかし，現実の制御系設計問題においては，それぞれに特徴のある固有の制御対象を扱う必要があるので，ゲインスケジューリング手法などのこれまでに提案されている補償器設計法を直接適用しても必ずしも良い結果が得られるとは限らない．また，離散時間繰返し制御系のように，高次でも実装が容易な場合があり，補償器実装の容易さはその次数だけで決定されるとは限らない．

これらの疑問を解消するために本論文では，補償器の構造に注目した補償器設計法を提案する (Fig. 1.5)．まず設計面では，ゲインスケジューリング手法の応用上の課題を検討する: 近年ニューアクチュエータとして注目されている超音波モータの回転速度制御を題材として，制御対象のモデルおよび制御系の設計仕様の 2 つの側面で制御上の課題を抽出し，対応する補償器の構造を整理する．これに対してゲインスケジューリング手法を直接適用する場合の問題点を指摘し，この問題を解決する改良設計手法を提案する．また実装面では，補償器の次数が同一でも，その構造を利用することにより，実装を容易に行うことを考える．

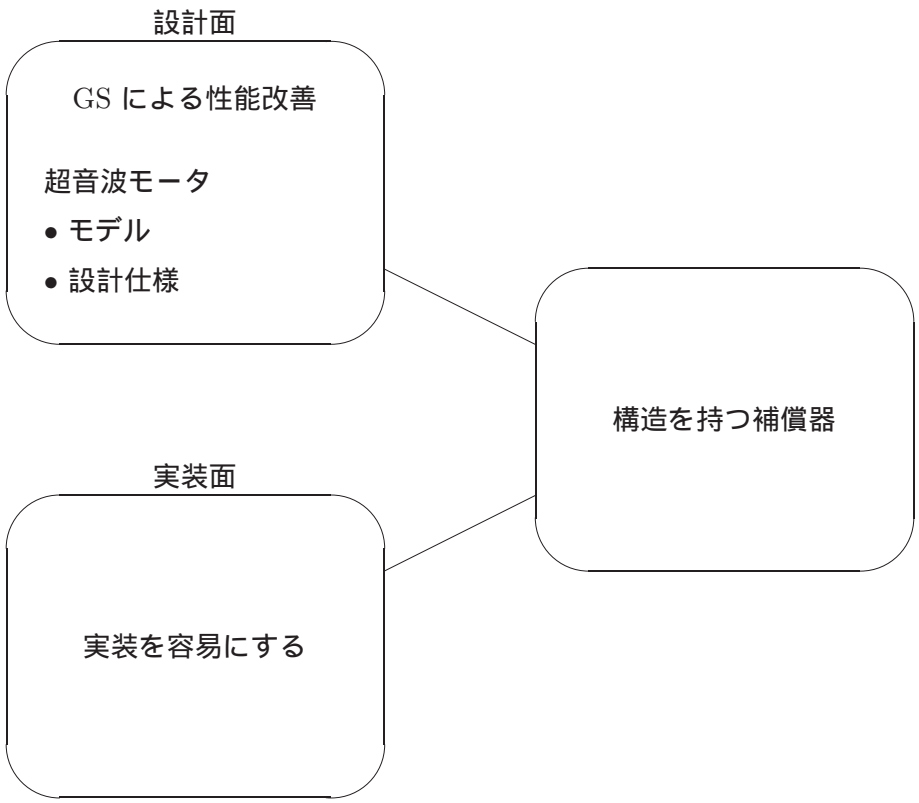


Fig. 1.5: Basic Concept of the Thesis

1.3　本論文の構成と概要

本論文の構成図を Fig. 1.6 に示す．まず，超音波モータの回転速度制御系を設計する上での課題を抽出する．つぎにこの課題に対して，従来の方法を適用する場合の問題点を指摘する．この問題点を解決する改良設計法を提案し，実験による検証を行う．最後に，実装面を考慮した，より一般的な補償器設計法を提案する．本論文前半は，制御対象のモデルと制御系の設計仕様の 2 つの観点で議論を進める．

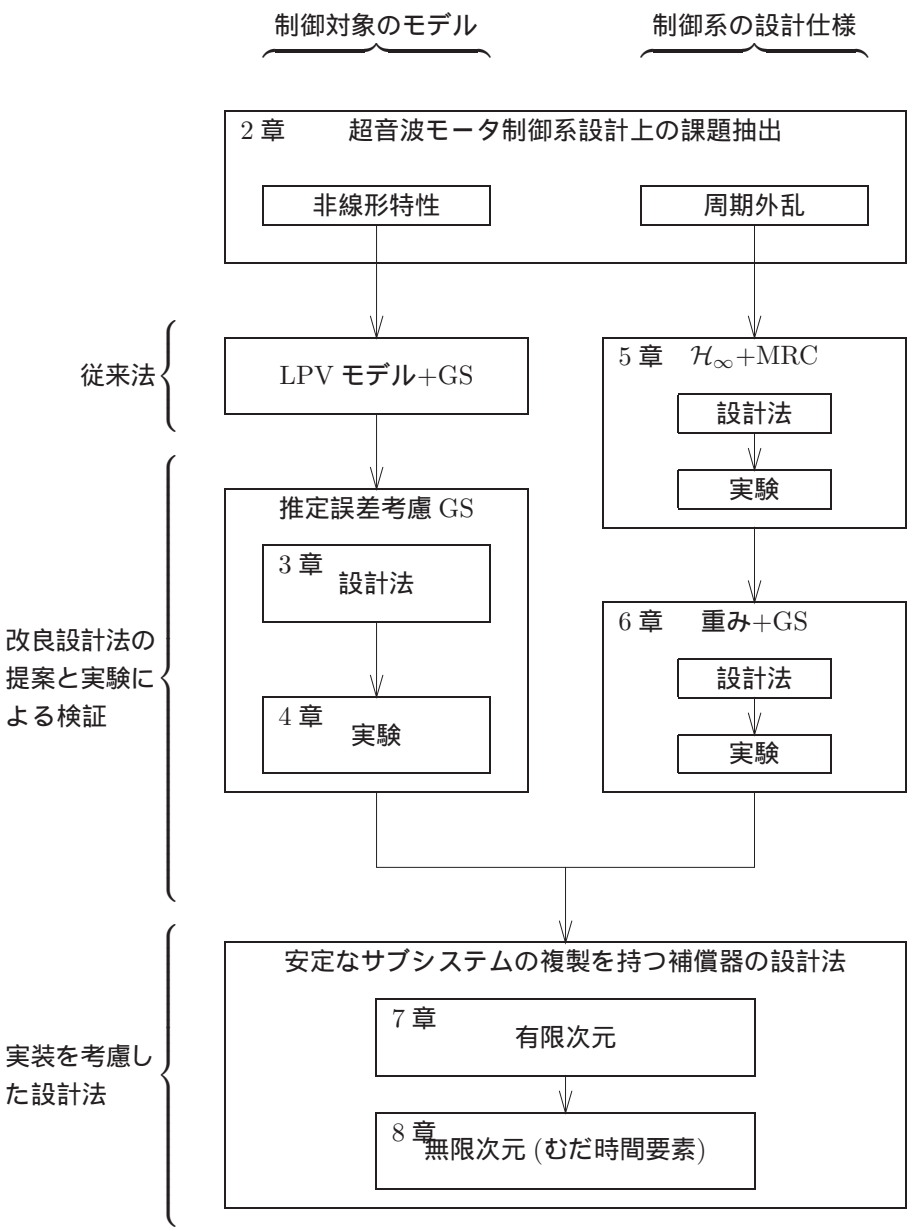


Fig. 1.6: Relations among the Chapters

GS　：　Gain Scheduling
MRC　：　Morified Repetitive Control

本論文の概要は以下の通りである．

まず，第 2 章 において，超音波モータの回転速度制御を行なう際の問題点と，制御系設計に要求される事柄を明らかにする．その結果に基づいて，従来の手法を用いて制御系設計を行う際の問題点を検討し，本論文の動機づけを行う．

第 3 章 では，パラメータの推定誤差が存在する状況において，ロバスト性能を達成するゲインスケジューリング補償器の設計を考える．ゲインスケジューリングに用いられるパラメータは有界であると仮定し，さらに誤差を伴った推定の特性を考慮することにより，保守性の低いパラメータモデルを提案する．このモデルによって切替え型のゲインスケジューリングを表現することができる．定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが 1 未満となることをロバスト性能の指標にとることにより，提案するパラメータモデルに対してゲインスケジューリング補償器が存在するための十分条件を双線形行列不等式拘束を持つ線形行列不等式条件で示す．また，数値例を用いてパラメータの推定精度と制御性能の関係を調べ, 本手法の有効性を確認する. さらに，推定精度がパラメータの値に依存する場合に対して，双一次関数を用いたパラメータモデルを提案し，簡単な変更を加えるだけで同様の議論ができることも示す.

第 4 章 では，超音波モータの非線形特性を陽に考慮した高精度な回転速度制御系を設計する．そのために，まず，ステータの振動振幅の情報を利用することにより，超音波モータの非線形特性を表現するプラントモデルを提案する．つぎに，提案するプラントモデルを用いてより高い制御性能を得るために，ゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御を適用し，ステータの振動振幅に依存する補償器を系統的に設計する．また，速度制御実験を行い，提案手法の有効性および問題点を検討する．

第 5 章 では，超音波モータの開ループ時の速度変動がほぼロータの回転に同期していることに注目し，速度変動を外乱と捉えて，修正繰返し補償器を併用した定速度制御系を提案する．そのために，まず，温度上昇をともなう動特性変化を周波数領域の摂動と考え, 混合感度問題を用いた外乱抑制制御系を設計する．つぎに，回転同期の速度変動成分をより積極的に除去するために，制御系の安定性をそこなうことなく修正繰返し補償器を制御系に付加し，外乱抑制性能の改善を図る．また，実際に速度制御実験を行い，提案手法の有効性を示す．

第 6 章 では，周期外乱抑制制御系に対する保守性の低い設計を行うことを考える．まず，修正繰返し制御系設計の保守性を低減させるために，ゲインスケジューリング手法を適用すると，周期外乱を抑制する性能が劣化する場合があることを例題を用いて指摘する．また，ゲインスケジューリング手法を適用する場合には，修正繰返し制御系設計問題の可解性が I 型サーボ系設計問題と等価になることを示す．これに対して本章では，むだ時間要素を含む重み関数を用いた周期外乱抑制制御系の設計手法を提案する．この手法により，周期外乱の抑制性能を悪化させることなく設計の保守性が低減されることを例題を用いて示す．また，シミュレーションおよび超音波モータに対する速度制御実験を行い，提案手法の有効性を示す．

第 7 章 では，多目的制御系設計問題において一般化プラントの状態の一部をある安定なシステムを用いて生成できる場合に，そのシステムを陽に持つ補償器の設計法を提案する．具体的には，与えられた問題を，一部の状態が観測できるとした等価な問題に帰着できることを示し，さらにその等価な問題に

対する解と安定なシステムを用いてもとの問題の補償器が得られることを示す．提案手法はつぎの利点を持つ: (1)LMI を用いて一般的な設計仕様を考慮しかつ一般化プラントの状態を生成するシステムを陽に持つ補償器を得ることができる; (2) 補償器設計時の LMI の解を求めるために必要な計算量を低減させることができる; (3) 制御則の計算時間を短縮することができる．また，離散時間入力むだ時間系の場合にシミュレーションを行い，実際に制御則の計算時間が短縮されることを確認する．

第 8 章 では，むだ時間を含む制御系の設計問題において，むだ時間要素の入力が観測出力として利用可能で，かつ，むだ時間要素の有限次元近似モデルが近似誤差の LFT として与えられた場合に，むだ時間要素と有限次元システムから構成される実装可能な補償器の設計法を提案している．具体的には，(1) 与えられた問題を，近似誤差の出力が観測出力として利用可能であるとした等価な問題に帰着できることを示し，さらに，(2) 導出された等価な問題に対して，ゲインスケジューリング手法を適用して補償器を設計する場合には，近似誤差を含まない補償器が設計可能であることを示す．

第 9 章 では，本論文で得られた結果を総括する．

表記法:　$\mathbf{R}$ は実数の集合であり, $\mathbf{R}^n$ は n 次元実数ベクトルの集合, $\mathbf{R}^{n\times m}$ は $n\times m$ の実行列の集合を表す. I_n は n 次の単位行列, $0_n, 0_{n\times m}$ は，それぞれ $n\times n, n\times m$ 次の零行列を表わす．ただし，文脈から明らかな場合には，サイズを省略することとする．$\bar{\sigma}(M)$ は行列 M の最大特異値を表す. 行列 $M\in\mathbf{R}^{n\times m}$ に対し，$M^\perp$ は $\mathcal{N}(M^\perp)=\mathcal{R}(M)$ を満たす行フルランクの行列を表す. ただし $\mathcal{N}(M)$ と $\mathcal{R}(M)$ はそれぞれ行列 M の零空間, 値域を表す. $M^T, M^{-1}, M^\dagger$ はそれぞれ, 行列 M の転置行列, 逆行列, 疑似逆行列を表す. 複素開 (閉) 右半平面を $\mathbf{C}_+(\bar{\mathbf{C}}_+)$ と表す．$\mathbf{C}_+$ で正則かつ

$$\sup_{s\in\mathbf{C}_+}\bar{\sigma}(G(s)) \tag{1.1}$$

が有界となる関数 $G(s)$ の集合を $\mathbf{H}_\infty$ と表す．$G(s)\in\mathbf{H}_\infty$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを (1.1) 式で定義し，これを $\|G\|_\infty$ と表記する．プロパーかつ安定な実有理伝達関数行列の集合を $\mathbf{RH}_\infty$ と表す．$\|G\|_\infty\le 1$ を満たす $G(s)\in\mathbf{H}_\infty$ の集合 (ボール集合) を $\mathbf{BH}_\infty$ と表す．適当なサイズの伝達関数行列 $\Delta(s)$ と $M(s)$ の線形分数変換 (LFT) をつぎのように表す．

$$M\star\Delta \;:=\; M_{11}+M_{12}\Delta(I-M_{22}\Delta)^{-1}M_{21} \tag{1.2}$$

$$\Delta\star M \;:=\; M_{22}+M_{21}\Delta(I-M_{11}\Delta)^{-1}M_{12} \tag{1.3}$$

ただし，M_{ij} は M を適当に分割したブロック行列である[2]．線形時不変なシステムをつぎのように表す．

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left\{\begin{array}{rcl} \sigma x(t) &=& Ax(t)+Bw(t) \\ z(t) &=& Cx(t)+Dw(t) \end{array}\right. \tag{1.4}$$

ここで $x(t), w(t), z(t)$ はそれぞれシステムの状態，入力，出力で，$\sigma x(t)$ は $\dot{x}(t)$ (連続時間の場合) または $x(t+1)$ (離散時間の場合) を表す．誤解を生じない場合には引数 (t) を省略する．また $G(s)$ $(G(z))$ が連続時間 (離散時間) の伝達関数行列であるとき，文脈から判断できる場合には (s) $((z))$ を省略する．

[2] $\star$ が具体的に (1.2), (1.3) 式のどちらの LFT を意味するかは，行列のサイズから判断可能であるので，本文中では特に明示しない．

第2章　超音波モータの制御系設計上の課題

本論文では，超音波モータの回転速度制御を通して，ゲインスケジューリング手法を応用する場合の問題点を指摘する．さらに，その問題点を解決し，かつ設計・実装が容易な補償器を得るための手法を検討する．そこで本章では，超音波モータの回転速度制御を行う上での問題点と，対応する補償器の構造を整理し，本論文の動機づけを行う．

2.1　超音波モータの概要

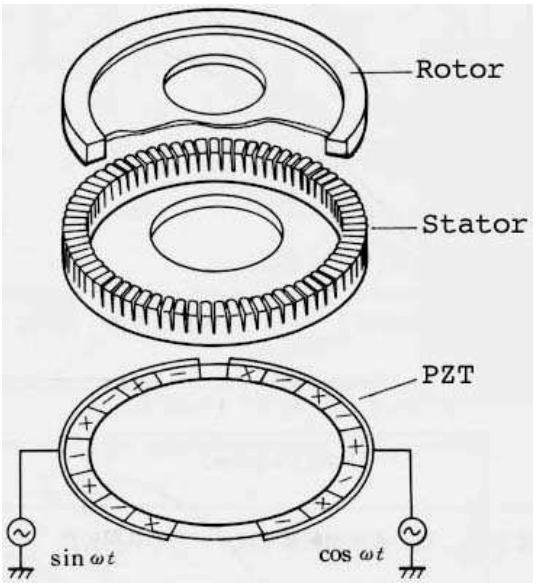


Fig. 2.1: Ultrasonic Motor

進行波型超音波モータ [13](以下，超音波モータ) は，ステータとロータの 2 つの金属製円環から構成される (Fig. 2.1)．ステータには一方の面に圧電素子が貼られており，これに 2 相の高周波電圧を印加することによりステータ表面に進行波が発生する．反対側の面には変位拡大用の突起が設けられており，これをロータに加圧接触させることにより，摩擦力を介してロータが駆動される．

圧電素子に印加する高周波電圧 (加振電圧) の周波数をステータの共振周波数に近づければロータの回転速度は速くなり，逆に共振周波数から遠ざけるとロータの回転速度は遅くなる．よって，回転速度制御を行う場合，加振電圧の周波数を制御入力として利用することができる (Fig. 4.2 に加振周波数と平均回転速度の関係を示している)．

超音波モータは低速で大トルクが得られ自己保持トルクが大きいなど，従来の電磁モータに比べて優れた長所を有する反面，摩擦力に起因するつぎの問題点を持つことが知られている [14, 15, 16, 17]:

問題 **1)** 非線形かつ温度および負荷に依存する動特性

問題 **2)** 温度上昇によるロータ回転速度の低下

問題 **3)** ステータ・ロータ表面のそりに起因すると考えられる回転同期の速度変動

超音波モータの解析的モデルは得られていないため，制御用プラントモデルを得るためには超音波モータをブラックボックスと考え，周波数応答実験などのシステム同定を行う必要がある．この際に問題 1 が観察される．すなわち，問題 1 は制御対象のモデルの問題である．

一方問題 2, 3 は，超音波モータを開ループで運転した場合の現象として観察される．超音波モータを開ループすなわち加振電圧一定の状態で運転した場合の回転速度の時間応答の一例を Fig. 2.2,Fig. 2.3 に示す．Fig. 2.2 より，時間の経過とともに平均的な回転速度が低下しており，問題 2 を確認することができる．また，Fig. 2.3 より，回転速度変動はほぼ回転に同期しており，問題 3 を確認することができる．これらの問題は，被制御量である回転速度に関する事前情報であり，制御系の設計仕様として考慮するのが自然であると考えられる．

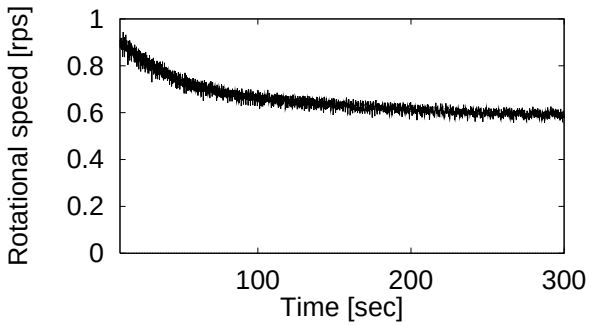


Fig. 2.2: Slowdown of Rotational Speed (Open Loop)

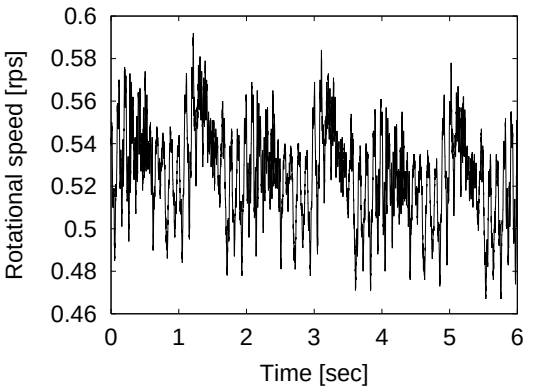


Fig. 2.3: Periodic Fluctuation in Rotational Speed (Open Loop)

そこで，以下では，問題 1 を制御対象のモデルに関する問題，問題 2, 3 を制御系の設計仕様に関する問題ととらえ，これらの問題に対してゲインスケジューリング手法を適用する場合の問題点を指摘し，制御対象のモデルと制御系設計仕様における課題を整理する．

2.2　非線形特性への対処法と課題

超音波モータの非線形特性の問題に対処するために，これまでに，適応制御やニューラルネットワークに基づく超音波モータの速度制御系が提案されている [14, 16, 18, 17]. たとえば文献 [16] では，非線

形特性をプラントのパラメータ変動の影響ととらえ，パラメータを動的に推定することによって良好な速度制御実験結果を得ている．しかし実際のプラントの非線形特性とプラントモデルにおけるパラメータの関係が明確でないため，系統的に制御系を設計することは容易ではない．

これに対して，非線形特性をプラントのモデル化誤差ととらえれば，$\mathcal{H}_\infty$ 制御を用いて非線形特性に対してロバストな制御系を系統的に設計することができる．実際に，超音波モータの加振周波数を正弦波状に変化させることにより周波数応答実験を行った結果を Fig. 2.4 に示す[1]．ここで乗法的摂動を持つプラントモデル

$$P(s) = P_0(s)(1 + W_{T_{LTI}}(s)\delta(s)) \tag{2.1}$$

を仮定して，ノミナルプラント $P_0(s)$ からのずれを全て覆うように重み関数 $W_{T_{LTI}}(s)$ を調整すれば，Fig. 2.4 の特性を考慮することができる (図中，実線は P_0 のゲイン特性を示している)．しかし，Fig. 2.4 のゲイン特性は大きく (10 倍程度) 変化しており，ノミナルプラントを一つに固定するとモデル化誤差が大きくなるため，高い制御性能を得ることは容易ではない．

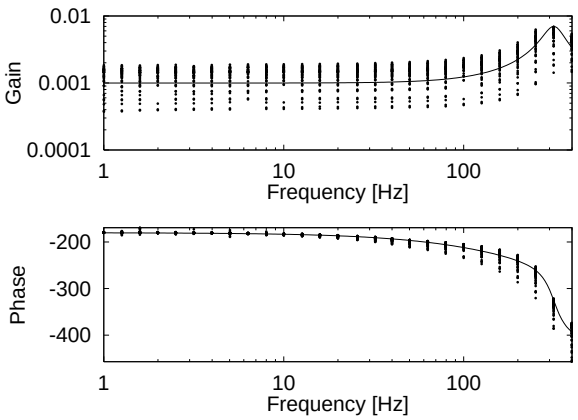


Fig. 2.4: Frequency Response of Plant (dot : measured, line : nominal plant model)

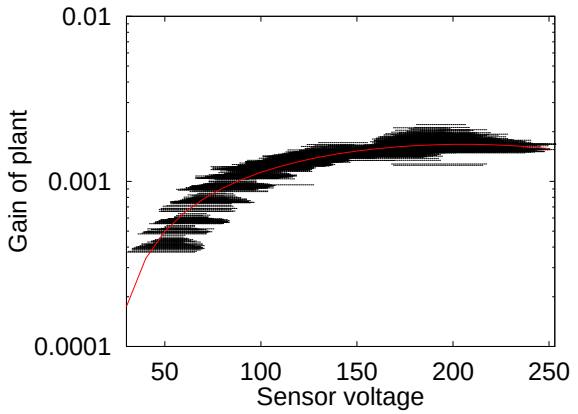


Fig. 2.5: Relationship between Sensor Voltage v_s and Plant Gain (dot : measured, line : $|k(v_s)P_0(j\omega)|$

モデル化誤差を小さく見積もるための一つの可能性として，超音波モータのセンサ電圧の利用が考えられる．センサ電圧は，本超音波モータに設けられた標準的な出力で，ステータの振動状態に比例した電圧である．そこで，センサ電圧の情報を利用してプラントのモデル化を行うことを考える．Fig. 2.5[2]は，Fig. 2.4 におけるプラントのゲインとセンサ電圧の関係を表している．これより，プラントのゲイン特性はセンサ電圧に依存しており，センサ電圧からプラントのゲインを推定することができる．

センサ電圧の情報を利用するためにここでは，(2.1) 式 にセンサ電圧依存の可変ゲインを導入したつぎのプラントモデルを考える．

$$P(s) = k(v_s)P_0(s)(1 + W_{T_{LPV}}(s)\delta(s)) \tag{2.2}$$

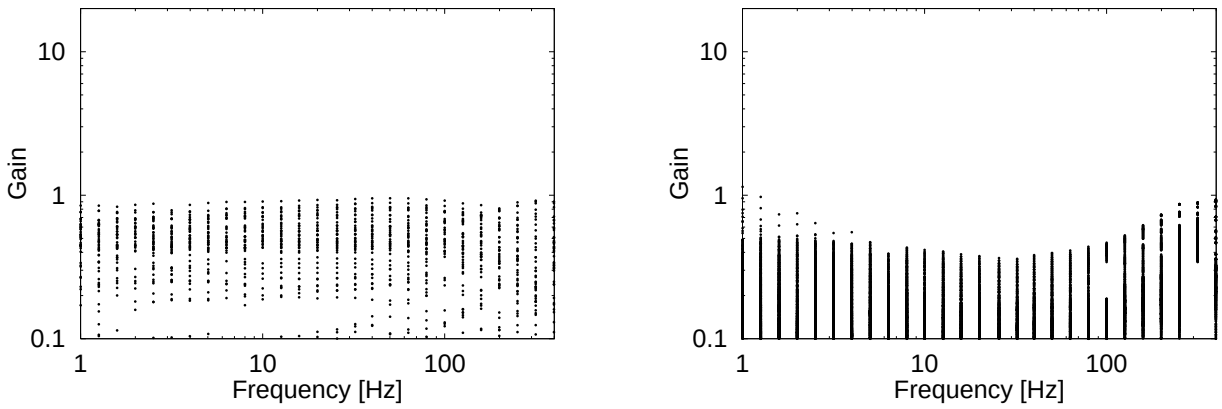
[1]Fig. 2.4 は Fig. 4.4 と同一である
[2]Fig. 2.5 は Fig. 4.5 と同一である

ここで $k(v_s)$ がセンサ電圧依存の可変ゲインで，Fig. 2.5 の傾向から，v_s の 2 次多項式として仮定し，その係数を最小自乗近似により決定する[3]．Fig. 2.5 の実線は，センサ電圧から推定されるプラントのゲイン特性，すなわち $k(v_s)P_0(s)$ のゲイン特性を示している．実線が実験点のよい近似になっていることから，ノミナルプラントをセンサ電圧依存の LPV モデルとすることにより，LTI のノミナルプラントを用いる場合に比べてモデル化誤差を小さく見積もることができ，さらにゲインスケジューリング手法を適用してセンサ電圧依存の補償器を得ることにより，センサ電圧を利用しない場合に比べて制御性能が向上すると期待できる．

ところが実際には，LPV モデルを用いても LTI モデルを用いる場合に比べてモデル化誤差を小さくすることができない: (2.1) 式 と (2.2) 式 を用いた場合のモデル化誤差のゲイン特性

$$\left|\frac{P(j\omega)-P_0(j\omega)}{P_0(j\omega)}\right|, \quad \left|\frac{P(j\omega)-k(v_s)P_0(j\omega)}{k(v_s)P_0(j\omega)}\right|$$

をそれぞれ Fig. 2.6 の (i), (ii) に示す．LPV モデルを用いる場合には，10 ~ 100 Hz の周波数帯域でモデル化誤差のゲインが小さくなっているが，低周波数領域では LTI モデルよりもゲインが大きくなっている．



(i) LTI model　　(ii) LPV model

Fig. 2.6: Gain Characteristic of Modeling Error

この原因は，LPV モデルのゲインが LTI モデルのゲインに比べて，必要以上に大きく変化することにある．このことを示すために，Fig. 2.5 に LTI モデルのゲインを破線で描き入れた図を Fig. 2.7 に示す．LTI モデルのゲインはセンサ電圧によらず一定であるため，センサ電圧とプラントのゲインの関係を良く表しているとは言えないが，LTI モデルのゲインは，実験点のほぼ中央の値をとっている．これに対して，LPV モデルのゲインはセンサ電圧により変化し，センサ電圧とプラントのゲインの関係を良く表していると言えるが，センサ電圧が約 30 以下の範囲で，LPV モデルのゲインは実際にプラントゲインが変化する範囲を超えて小さくなっており，結果的にゲインが広く変化する保守的なモデルとなっている．よって，パラメータがモデルに与える影響が不確かな場合でも，パラメータの情報を有効に利用し，かつ，保守性の低いプラントモデルを構築することが実用上重要となる．

[3]詳細は 第 4 章 を参考のこと

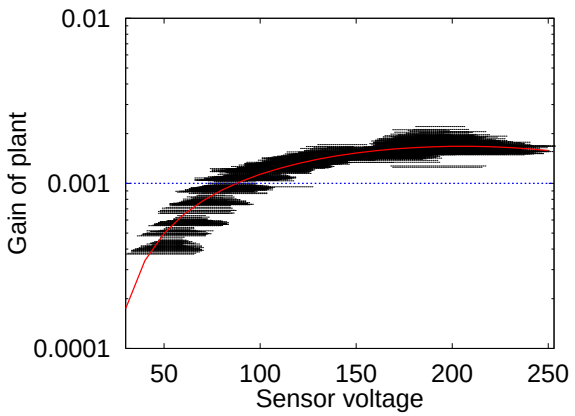


Fig. 2.7: Relationship between Sensor Voltage v_s and Plant Gain (dot : measured, line : $k(v_s)P_0(j\omega)$, dashed-line : $P_0(j\omega)$

以上より，制御系設計の省力化や信頼性向上のため，パラメータの情報を積極的に利用し，かつ，系統的に補償器設計を行うことが，ゲインスケジューリング手法の応用上重要である．そのために，

- パラメータの不確かさを考慮した保守性の低いパラメータモデルの構築

が必要である．さらに工学的見地から，

- パラメータの不確かさの大きさと達成可能な制御性能の関係

を明らかにすることも重要である．

これらの課題に対処するため本論文では，第 3 章 において，プラントと補償器双方のパラメータに推定精度に応じたずれが生じる状況を考え，推定誤差を考慮したゲインスケジューリング補償器の設計手法を提案する．また，そこで得られる知見を応用し，第 4 章 において，ゲインスケジューリングに基づく超音波モータの回転速度制御系を構成する．

2.3 周期的な回転速度変動への対処法と課題

問題 2, 3 は，制御系に繰返し補償器を含ませることによって考慮することができる．超音波モータに対して繰返し補償器を含む制御系を構成した研究には，適応制御と繰返し制御を組み合わせた速度制御系の研究 [19] があり，良好な制御性能が得られている．しかし, そこでの評価関数の重み係数や学習係数という物理的意味合いの少ないパラメータの調整は試行錯誤で行う必要があり, 系統的に制御系を設計することが難しいという問題がある．また，繰返し補償器を付加することが制御系の安定性に与える影響については議論されていない．

これに対して，修正繰返し補償器中のむだ時間要素をボール集合の要素ととらえてスモールゲイン条件を用いれば，制御系の安定性を損なうことなく繰返し補償器を付加することができ，周期外乱の抑制

性能を向上させることができる．実際に，電磁モータの回転むら制御に応用した例も報告されている [8]. また，予め $\mathcal{H}_\infty$ 制御を用いてプラントモデル化誤差や非線形特性などに対してロバストな制御系を構成しておけば，修正繰返し補償器を付加することにより，プラントのモデル化誤差や非線形特性を考慮しなおかつ周期外乱の重点的な抑制を行う制御系を系統的に得ることができる．本論文では 第 5 章 において，このような設計を行い超音波モータの回転速度制御系を構成する．

むだ時間要素をボール集合の要素ととらえたスモールゲイン条件に基づく設計は，異なるむだ時間周期に容易に対応できるという利点を持つ．すなわち，運転状況により目標速度が変更され外乱の周期が変化する場合でも，むだ時間を制御時の外乱周期に一致させるだけで所望の周期外乱を抑制することができる．その際，補償器の再設計を行う必要がない．実際に超音波モータに対して μ 設計に基づき修正繰返し制御系を設計した場合の感度特性を Fig. 2.8 の薄い実線に示す[4]．この図は，修正繰返し制御系を設計した後に，修正繰返し補償器中のむだ時間を $1/0.3$ 秒に設定する場合に対応しており，0.3 Hz の整数倍の周波数において感度が小さくなっていることから，この制御系では目標回転速度が 0.3rps のときの周期外乱を重点的に抑制できることがわかる．よって，目標回転速度が与えられたとき，その逆数をむだ時間の長さとすれば，周期外乱の抑制を行うことができる．

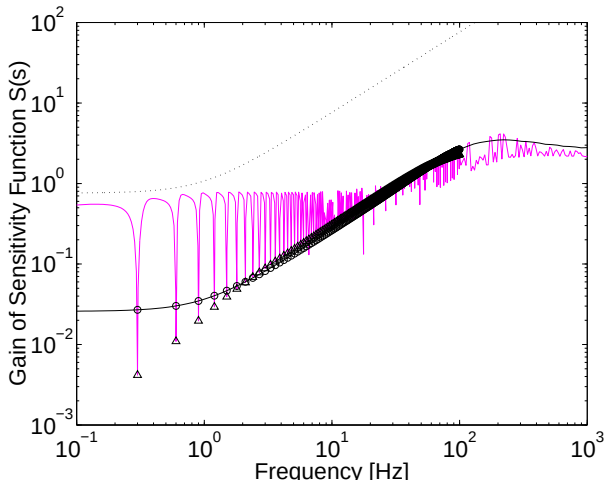


Fig. 2.8: Worst-case Sensitivity Gain

一方，現実の制御問題の中には，外乱の周期が不変かつ既知であるような場合も存在する．たとえばプリンタ, コピー機，スキャナなどでは，一定の距離，一定の速度で紙などの搬送物を正確に搬送することが要求される．この場合，モータなどの回転アクチュエータには，搬送物の速度とギアの速比から決定される一定周期の外乱が加わる．このような場合には，従来のような外乱周期に依存しない設計は保守的である．これに対して，外乱周期に依存した設計を行うことにより保守性の低い設計を行えば，周期外乱の抑制性能は向上すると考えられる．そのための一つの方法は，むだ時間要素を有限次元近似し，補償器に近似誤差の LFT の構造を持たせて，ゲインスケジューリング手法を適用して補償器設計を行

[4]Fig. 2.8 は，Fig. 6.3 と同一である

うことである．

ところが，そのような設計を行い，修正繰返し制御系設計の保守性を低減させると，周期外乱の抑制性能が悪化することがある．実際に修正繰返し制御系に対してゲインスケジューリング手法を適用し，保守性の低い設計を行った場合の感度特性を Fig. 2.8 の濃い実線に示す．μ 設計の場合に見られた下向きのピーク特性が消滅しており，周期外乱の抑制性能が悪化している．このような現象が生じること，および，その理由についてはこれまでに明らかにされていない．また，このような現象を生じることなく保守性の低減が可能な周期外乱抑制制御系の設計法も提案されていない．

以上より，

- 周期外乱の抑制性能を損なうことなく設計の保守性低減が可能な補償器設計法の開発

が求められる．そのために，

- 修正繰返し制御系設計の保守性を低減させると，ピーク特性が失われる理由を明らかにする

ことも重要である．

これらの課題に対処するために本論文では，第 6 章 において，重み関数にピーク特性を持たせて感度特性を整形することを考える．また，修正繰返し補償器を閉ループに含めると，制御系設計問題にどんな制約が課されるか検討する．

第3章　パラメータ推定誤差を考慮したゲインスケジューリング補償器の設計

本章では，パラメータのばらつきの影響をパラメータの推定誤差と考え，ロバスト性能を達成するゲインスケジューリング補償器の設計手法を考える．ゲインスケジューリングに用いられるパラメータは有界であると仮定し，さらに誤差を伴った推定の特性を考慮することにより，保守性の低いパラメータモデルを提案する．このモデルによって切替え型のゲインスケジューリングを表現することができる．定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが 1 未満となることをロバスト性能の指標にとることにより，提案するパラメータモデルに対してゲインスケジューリング補償器が存在するための十分条件を双線形行列不等式拘束を持つ線形行列不等式条件で示す．また，数値例を用いてパラメータの推定精度と制御性能の関係を調べ, 本手法の有効性を確認する. さらに，推定精度がパラメータの値に依存する場合に対して，双一次関数を用いたパラメータモデルを提案し，簡単な変更を加えるだけで同様の議論ができることも示す.

3.1　緒言

パラメータ変動の影響を受けるプラントに対する制御系設計手法として，ロバスト制御による手法とゲインスケジューリング [4, 20, 21] による手法が知られている．前者はパラメータを摂動として扱い，パラメータ変動するプラントすべてを一つの補償器で制御する方法である．一方，後者はプラントのパラメータに依存し，それに伴って変化する補償器を設計する手法である．

これら二つの手法は，それぞれ，パラメータが未知，または既知であることを想定している．これら二つの立場は，いづれも両極端であり，パラメータがある誤差を伴って推定できると考える方がより現実的である．しかしながら，このような問題に対してロバスト制御の手法を適用すると，設計された制御系は保守的になり，一方，ゲインスケジューリングを適用すると，制御系の安定性さえ保証できないという問題がある．また，あらかじめ用意しておいた複数の補償器を切り替えながら制御するゲインスケジューリング方式は，従来，経験に基づいて設計されており，その系統的な設計法は議論されていない．また，そのようなゲインスケジューリングについて，補償器切り替え時の安定性を理論的に保証するものはない．

そこで本章では，パラメータの推定誤差を考慮したゲインスケジューリング補償器の設計問題を考え，推定値に基づくゲインスケジューリングと，切り替え型制御系の構成法の二つを実現する統一的な制御系設計法を提案する．以下，第 3.2 節 において，推定誤差を考慮したパラメータモデルを提案し，従来手法の問題点と提案手法の考え方について説明する．つぎに第 3.3 節 で問題設定を行い，第 3.4 節 で，

補償器が存在するための十分条件を制約つきの LMI で与える．さらに第 3.5 節 では，パラメータの値により推定精度が異なる場合に対し，提案手法をより効果的に適用する方法を示す．

3.2　パラメータのモデル

LMI 条件に基づくゲインスケジューリング補償器設計手法が，Packard[4] によって提案されているが，そこではパラメータの推定に伴う誤差が与える影響については考慮されていない．そこで本節では，まずパラメータの推定誤差が閉ループ系のロバスト性能に与える影響を調べる．さらに，推定誤差を考慮した設計を行う際に必要となるパラメータの推定誤差モデルについても考察し、保守性の低いパラメータモデルを提案する．

3.2.1　従来手法の問題点

まず，例題を用いて，従来手法の問題点を明らかにする．プラント

$$P(z,\theta_p)=\frac{1}{z-\frac{1}{2}\theta_p-2} \tag{3.1}$$

を用いて与えられる Fig. 3.1 の制御系において、$|\theta_p|\le 1$ を満たす任意の θ_p に対して，閉ループ系が内部安定かつ，d から e までの L_2 誘導ノルムが γ 未満となるような補償器 $K(z)$ を設計することを考える．ここで θ_e は，プラントのパラメータ θ_p の推定値を表わす．理想的には $\theta_e=\theta_p$ であるが，現実にはプラントのパラメータの推定には誤差を伴うので，ここでは

$$\theta_e=\theta_p+\alpha\delta \tag{3.2}$$

であると仮定する．ただし，α は推定精度を表わす定数で，$0\le\alpha\le 1$ を満たす実数である．一方，δ は推定誤差を表わし，$|\delta|\le 1$ を満たす任意の実数とする．

このような問題に対し，まず理想的な条件 $\alpha=0$ を仮定してゲインスケジューリング補償器の設計を行った場合を考える (手法 a)．このような条件で一つの補償器を設計し，(3.2) 式 のもとで閉ループ系のロバスト性能解析を各 α について行った結果，Fig. 3.2 の点線で示される値が得られた．このように，パラメータの推定誤差を考慮せずにゲインスケジューリング補償器の設計を行うと，実際の変動に対して性能が著しく劣化することがある．そこで，推定誤差を考慮した設計を行う必要がある．

推定誤差を考慮する際，(3.2) 式 の設定でゲインスケジューリング補償器を設計するのは困難であるので，θ_e を用いて θ_p を表現しなければならない．すなわち，θ_e を用いて表わされた θ_p のパラメータモデルを構築する必要がある．このとき，最も簡単なモデルとして

$$\theta_p=\theta_e+\alpha\delta \tag{3.3}$$

を与え，δ を補償器で利用できない変動パラメータと考えて，文献 [4] の手法を適用する．このとき，内部安定化補償器が存在する γ の下限を調べると，各 α に対して Fig. 3.2 の破線で示される値が得られ

る (手法 b) . これより，推定誤差を考慮しなかった場合よりもロバスト性能の改善が期待できることがわかる . しかしながら，θ_p を変動と考えたロバスト制御系を設計した場合には，$\gamma = 4.0$ のロバスト性能を達成することができるので，α が 1 に近い値をとるときに，ロバスト制御の場合よりも保守的な結果を与えていることがわかる .

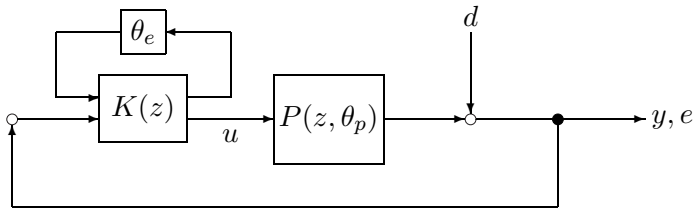


Fig. 3.1: Control System for Illustration

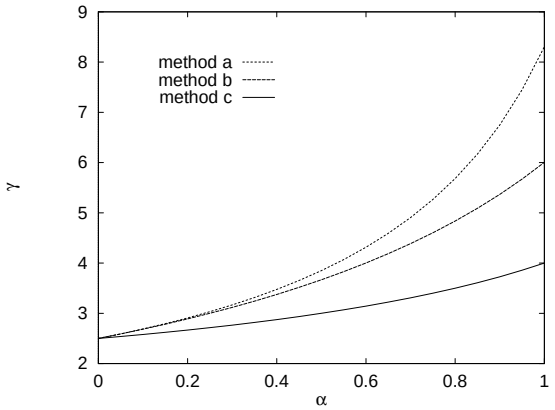


Fig. 3.2: Performance Criteria γ for Each α

(3.3) 式に基づくモデルが，ロバスト制御よりも保守的な結果を与えることを，θ_p が変動する領域を考えることによって説明することができる . (3.2) 式において，θ_p が区間 $[-1, 1]$ を変化すると，θ_e は Fig. 3.3 の薄い灰色の領域を変化し，$\theta_e \in [-1-\alpha, 1+\alpha]$ となる . この θ_e に対し，(3.2) 式によって与えられる θ_p の変動領域は，Fig. 3.3 の白色の領域を変化するため，$\theta_p \in [-1-2\alpha, 1+2\alpha]$ となる . このように，θ_p の変動領域が必要以上に拡大されており，パラメータ変動の表現が保守的になっていることがわかる .

3.2.2　パラメータモデルの提案

前節で示したように，これまで提案されている手法を，パラメータ変動を含む場合に直接適用するのは好ましくない．これを解決する手法として，つぎの関数 $\tau_\alpha(\theta_e)$

$$\tau_\alpha(\theta_e) = \begin{cases} \alpha - 1 & \cdots \quad \theta_e \le \alpha - 1 \\ \theta_e & \cdots \quad |\theta_e| < 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \cdots \quad \theta_e \ge 1 - \alpha \end{cases} \tag{3.4}$$

を用いて θ_e の端部を切り詰め，この $\tau_\alpha(\theta_e)$ を補償器で利用する方法を提案する．さらに，パラメータのモデル θ_p を

$$\theta_p = \tau_\alpha(\theta_e) + \alpha\delta \tag{3.5}$$

とおくと，θ_p は Fig. 3.3 の濃い灰色の領域を変動するので，$\theta_p \in [-1, 1]$ となることがわかる．また，(3.5) 式のモデルにおいて，$\alpha = 1$ とすると $\theta_p = \delta$ となり，パラメータ情報が得られないロバスト制御系設計問題の枠組に一致する．一方，$\alpha = 0$ とすると $\theta_p = \theta_e$ となるので，パラメータの真値を用いる従来のゲインスケジューリングの枠組に一致する．したがって，(3.5) 式のモデルは，ロバスト制御系設計とゲインスケジューリングを含む，より一般的な枠組を与えていることがわかる．実際，次節以降の手法に基づいて補償器を設計すると，Fig. 3.2 の実線で示されるロバスト性能を達成することができる (手法 c)．ここで，$\alpha = 0$ の場合には理想的なゲインスケジューリングの場合，$\alpha = 1$ の場合にはロバスト制御の場合と，それぞれ同じロバスト性能を達成している．

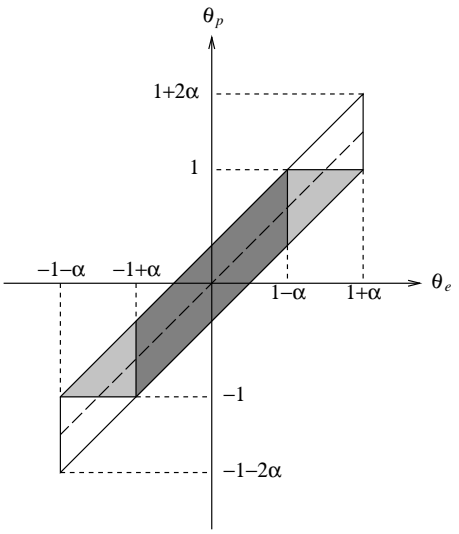


Fig. 3.3: Relationship between θ_p and θ_e

(3.5) 式のモデルにおいて

$$(1 - \alpha)\theta = \tau_\alpha(\theta_e),\ |\theta| \le 1 \tag{3.6}$$

を満たす変数 θ を導入すると，(3.5) 式のモデルは

$$\theta_p = (1-\alpha)\theta + \alpha\delta \tag{3.7}$$

と書くことができる．ここで，(3.7) 式のパラメータモデル θ_p に対して，補償器で利用できるパラメータ θ が離散値をとるとき，(3.7) 式のモデルは切り替え型補償器の設計問題を理論的に扱う枠組を与えている．例として，θ および，それに対する θ_p の存在範囲が

$$\theta_p \in \begin{cases} N : [-1, 0] & \cdots \quad \theta = -1/2 \\ G : [-1/2, 1/2] & \cdots \quad \theta = 0 \\ P : [0, 1] & \cdots \quad \theta = 1/2 \end{cases} \tag{3.8}$$

と与えられる場合を考える．このとき，$\alpha = 1/2$ とすると，(3.7) 式のモデルで任意の θ_p を表すことができる (Fig. 3.4 参照)．また，θ は離散的に変化するので，θ を利用する補償器も離散的に変化することになり，切り替え型の補償器となる．

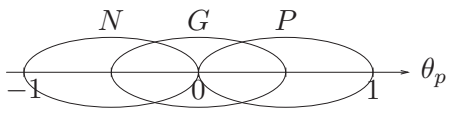


Fig. 3.4: Range of θ_p Corresponding to $\theta = -1/2, 0, 1/2$

注意 **3.1** *Apkarian* ら *[22]* は本研究とは独立に，文献 *[4]* と同様な設計手法に対してパラメータ θ_p の推定誤差モデルを与えている．しかし，そこでは，不確かなパラメータ δ が補償器に接続される設定になっており，これをパラメータ誤差のない場合の設計問題に帰着させるのは困難である．

3.3 問題設定

パラメータ $\theta_p[k]I_q$，およびその推定値 $\theta[k]I_{\tilde{q}}$ が，それぞれ離散時間のプラント $\mathcal{G}(z)$，および補償器 $\mathcal{K}(z)$ に，Fig. 3.5 のように接続された制御系を考える[1]．ただし，w，$z \in \mathbf{R}^q$，$\tilde{w}$，$\tilde{z} \in \mathbf{R}^{\tilde{q}}$，$d \in \mathbf{R}^{m_1}$，$e \in \mathbf{R}^{p_1}$，$y \in \mathbf{R}^{p_2}$，$u \in \mathbf{R}^{m_2}$ であり，プラントのパラメータ $\theta_p[k]$ は

$$\theta_p[k] = (1-\alpha)\theta[k] + \alpha\delta[k] \tag{3.9}$$

で表わされるものとする．ここで，α は推定精度を表わし、$0 \le \alpha \le 1$ を満たす実定数，$\theta[k]$ は

$$|\theta[k]| \le 1; \ {}^{\forall}k \ge 0 \tag{3.10}$$

を満たす実数値関数であり，$\delta[k]$ は

$$|\delta[k]| \le 1; \ {}^{\forall}k \ge 0 \tag{3.11}$$

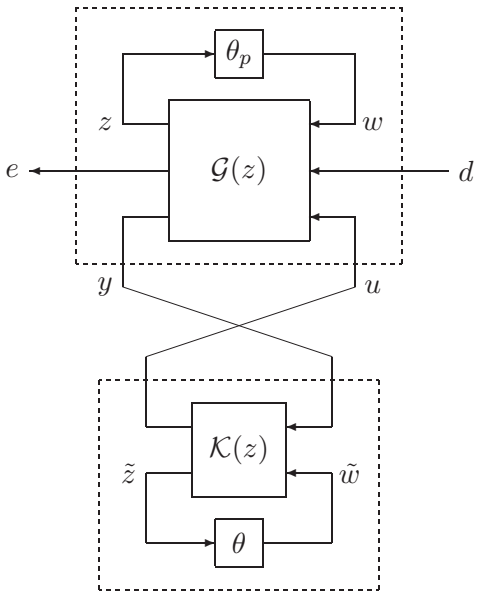


Fig. 3.5: Closed-loop System with Parameter Dependent Controller

を満たすルベーグ可測な任意の実数値関数である．

一方，$\mathcal{G}(z)$，$\mathcal{K}(z)$ の状態空間実現は，それぞれ

$$\mathcal{G}(z) = \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ \hline C_0 & D_{00} & D_{01} & D_{02} \\ C_1 & D_{10} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{3.12}$$

$$\mathcal{K}(z) = \left[\begin{array}{c|cc} \tilde{A} & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{array}\right] \tag{3.13}$$

で与えられるとする．ただし

$$A \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad \tilde{A} \in \mathbf{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}} \tag{3.14}$$

であり，その他の係数行列は適当なサイズをもつ実行列である．このとき，(3.12) 式)，(3.13) 式の各係数行列を用いて，定数行列

$$\left[\begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} & D_{02} \\ C_1 & D_{10} & D_{11} & D_{12} \\ \hdashline C_2 & D_{20} & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{3.15}$$

[1]ここでは簡単のためパラメータの数は 1 つとするが，複数の場合にも容易に拡張可能である (第 3.4 節 注意 3.4 参照)

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{22} & \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} \\ \tilde{B}_2 & \tilde{A} & \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{12} & \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

を定義し，さらに簡単のため次の仮定をおく．

[**A1**] G_{12}，G_{21} はそれぞれ列，行フルランク

[**A2**] $m_1 = p_1 = r$

仮定 [**A1**]，[**A2**] がない場合にも，同様の議論を展開することが可能であるが，記法を簡単にするため [**A1**]，[**A2**] を仮定する．

以上の仮定のもとで，閉ループ系を内部安定化し，かつ d から e の L_2 誘導ノルムを γ 未満にする補償器 $\mathcal{K}(z)$ を求める問題を考える．

3.4 補償器の設計

3.4.1 補償器の存在条件

Fig. 3.5 のシステムに対し，行列 G_{cl} および，スケーリング行列のクラス $\mathbf{Z}$ を以下のように定義する．

$$G_{cl} = \mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} R & U \\ V & S \end{bmatrix}, K\right) \tag{3.17}$$

$$\left[\begin{array}{cc} R & U \\ V & S \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} \hat{G}_{11} & 0 & \hat{G}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{n}+\tilde{q}} \\ \hdashline \hat{G}_{21} & 0 & \hat{G}_{22} & 0 \\ 0 & I_{\tilde{n}+\tilde{q}} & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_\alpha G_{11} T_\alpha^T & T_\alpha G_{12} \\ G_{21} T_\alpha^T & G_{22} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\alpha} I_q & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} I_q & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-\frac{1}{2}} I_r \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$\mathbf{Z} := \left\{ \begin{bmatrix} Z_1 & Z_3 \\ Z_3^T & Z_2 \end{bmatrix} > 0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} Z_1 = \mathrm{diag}(Z_{z1}, Z_{\theta 1}, Z_\delta, I_r), & Z_{z1} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \\ Z_2 = \mathrm{diag}(Z_{z2}, Z_{\theta 2}), & Z_{\theta 1}, Z_\delta \in \mathbf{R}^{q\times q}, \\ Z_3^T = \begin{bmatrix} Z_{z3}^T & 0 & 0_{\tilde{n}\times r} \\ 0 & Z_{\theta 3}^T & 0_{\tilde{q}\times r} \end{bmatrix} & Z_{z2} \in \mathbf{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}},\ Z_{\theta 2} \in \mathbf{R}^{\tilde{q}\times\tilde{q}}, \\ & Z_{z3} \in \mathbf{R}^{n\times\tilde{n}},\ Z_{\theta 3} \in \mathbf{R}^{q\times\tilde{q}} \end{array} \right\} \tag{3.21}$$

このとき，Z_z，Z_θ を

$$Z_z = \begin{bmatrix} Z_{z1} & Z_{z3} \\ Z_{z3}^T & Z_{z2} \end{bmatrix}, \quad Z_\theta = \begin{bmatrix} Z_{\theta 1} & Z_{\theta 3} \\ Z_{\theta 3}^T & Z_{\theta 2} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

と定めると，Z_z，Z_θ，Z_δ はそれぞれ $z^{-1}I_{n+\tilde{n}}$，$\theta I_{q+\tilde{q}}$，δI_q と可換な行列となる．

(3.17) 式の G_{cl} に対し

$$\bar{\sigma}\left(Z^{\frac{1}{2}} G_{cl} Z^{-\frac{1}{2}}\right) < 1 \tag{3.23}$$

を満たすスケーリング行列 $Z \in \mathbf{Z}$ が存在するならば，Fig. 3.5 の閉ループ系は内部安定であり，かつ d から e までの L_2 誘導ノルムが 1 以下となることが知られている [23]．(3.23) 式を満たす $Z \in \mathbf{Z}$ と K が存在するための必要十分条件は，以下の定理で与えられる．

定理 3.1 *(3.12)* 式の $\mathcal{G}(z)$ に対して、*(3.23)* 式*)* 式を満たす $Z \in \mathbf{Z}$，$K \in \mathbf{R}^{(m_2+\tilde{n}+\tilde{q})\times(p_2+\tilde{n}+\tilde{q})}$ が存在するための必要十分条件は

$$\hat{G}_{12}^{\perp}(\hat{G}_{11} X \hat{G}_{11}^T - X)(\hat{G}_{12}^{\perp})^T < 0 \tag{3.24}$$

$$(\hat{G}_{21}^T)^{\perp}(\hat{G}_{11}^T Y \hat{G}_{11} - Y)(\hat{G}_{21}^T)^{\perp^T} < 0 \tag{3.25}$$

$$\begin{bmatrix} X_z & I \\ I & Y_z \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.26}$$

$$\begin{bmatrix} X_\theta & I \\ I & Y_\theta \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.27}$$

$$X_\delta = Y_\delta^{-1} \tag{3.28}$$

を満たす正定行列 X_z，$Y_z \in \mathbf{R}^{n\times n}$，$X_\theta$，$Y_\theta$，$X_\delta \in \mathbf{R}^{q\times q}$ が存在することである．ただし

$$X = \mathrm{diag}(X_z, X_\theta, X_\delta, I_r), \quad Y = \mathrm{diag}(Y_z, Y_\theta, Y_\delta, I_r) \tag{3.29}$$

である．

証明 Packard の結果 [4] から、容易に証明できる．□

注意 3.2 *(3.23)* 式を満たす $Z \in \mathbf{Z}$ および，K が存在するとき，L_2 誘導ノルムが 1 以下となる任意の時変摂動 θ，δ に対してロバスト安定性が保証される *[23]*．よって，第 *3.2* 節 で示した切り替え型補償器の設計問題に対しても，安定性が保証される．

注意 3.3 定理 *3.1* で与えられる条件は，$X_\delta = Y_\delta^{-1}$ という非凸制約を含むため，一般に凸最適化手法を用いて補償器 $\mathcal{K}(z)$，およびスケーリング行列 Z の最適解を求めることはできない．しかし，凸最適化を繰り返し行うことにより，局所的最適解を求めることは可能である *[24]*．

注意 3.4 補償器で利用できるパラメータを複数にした場合にも，$\theta_p I_q$，$\theta I_{\tilde{q}}$ を，それぞれ

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \theta_p I_q & \rightarrow & \mathop{\mathrm{diag}}_{j=1,\ldots,l} \left(\theta_{p_j} I_{q_j} \right) \\ \theta I_{\tilde{q}} & \rightarrow & \mathop{\mathrm{diag}}_{j=1,\ldots,l} \left(\theta_j I_{\tilde{q}_j} \right) \end{array} \right. \tag{3.30}$$

と変更することにより，定理 *3.1* と同様な議論が成立する．ただし

$$\sum_{j=1}^{l} q_j = q, \quad \sum_{j=1}^{l} \tilde{q}_j = \tilde{q} \tag{3.31}$$

$$\theta_{p_j} = (1-\alpha_j)\theta_j + \alpha_j \delta_j, \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1,\ |\theta_j| \leq 1,\ |\delta_j| \leq 1; \quad j = 1, \ldots, l \tag{3.32}$$

であるとする．また，これに伴い，δI_q も

$$\delta I_q \rightarrow \mathop{\mathrm{diag}}_{j=1,\ldots,l} \left(\delta_j I_{q_j} \right) \tag{3.33}$$

と変更するものとする．

この場合，*(3.20)* 式の T_α を

$$T_\alpha = \mathrm{diag} \left(I_n, \left[\begin{array}{c} \mathrm{diag}(\sqrt{1-\alpha_j} I_{q_j}) \\ \mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_j} I_{q_j}) \end{array} \right], \gamma^{-\frac{1}{2}} I_r \right) \tag{3.34}$$

とし，定理 *3.1* に対して次のような変更を行えばよい．

$$X_\theta = \mathrm{diag}(X_{\theta_j}), \quad Y_\theta = \mathrm{diag}(Y_{\theta_j}), \quad X_\delta = \mathrm{diag}(X_{\delta_j}), \quad Y_\delta = \mathrm{diag}(Y_{\delta_j}) \tag{3.35}$$

ただし X_{θ_j}，Y_{θ_j}，X_{δ_j}，$Y_{\delta_j} \in \mathbf{R}^{q_j \times q_j}$ である．また，このとき *(3.27)* 式)，*(3.28)* 式の条件を，それぞれ

$$\left[\begin{array}{cc} X_{\theta_j} & I \\ I & Y_{\theta_j} \end{array} \right] \geq 0;\ j = 1, \ldots, l \tag{3.36}$$

$$X_{\delta_j} = Y_{\delta_j}^{-1};\ j = 1, \ldots, l \tag{3.37}$$

と分離することができる．

注意 3.5 第 *3.3* 節 の問題設定において，Z 変換変数 z の代わりにラプラス変換変数 s，また，$\theta_p[k]$，$\theta[k]$，$\delta[k]$ の代わりに $\theta_p(t)$，$\theta(t)$，$\delta(t)$ とおくことにより，連続時間の問題設定が得られる．この場合には，双一次変換

$$s = \frac{z+1}{z-1} \tag{3.38}$$

を用いることで，離散時間の問題として扱うことが可能である *[25]*．

3.4.2　補償器の構築

(3.24) 式) $\sim$ (3.29) 式を満たす正定行列 X，Y が存在するとき，(3.22) 式の Z_z，Z_θ を

$$Z_z = \begin{bmatrix} Y_z & N_z \\ N_z^T & N_z^T(Y_z - X_z^{-1})^{-1}N_z \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$Z_\theta = \begin{bmatrix} Y_\theta & N_\theta \\ N_\theta^T & N_\theta^T(Y_\theta - X_\theta^{-1})^{-1}N_\theta \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

のように定めることができる [26]．ただし，N_z，N_θ は，それぞれ $I - X_zY_z$，$I - X_\theta Y_\theta$ の最大ランク分解

$$M_zN_z^T = I - X_zY_z, \quad M_z, N_z \in \mathbf{R}^{n\times \mathrm{rank}(I-X_zY_z)} \tag{3.41}$$

$$M_\theta N_\theta^T = I - X_\theta Y_\theta, \quad M_\theta, N_\theta \in \mathbf{R}^{q\times \mathrm{rank}(I-X_\theta Y_\theta)} \tag{3.42}$$

で与えられる．さらに，$Z_\delta = Y_\delta$ とすれば，(3.21) 式から Z を定めることができる．

一方，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix} = U^TU > 0 \tag{3.43}$$

$$\begin{bmatrix} V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix}^{\perp^T} \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} V & 0 \end{bmatrix}^T = VV^T > 0 \tag{3.44}$$

が成り立つので，以下の 補題 3.1 より行列 K を

$$K = \hat{K}(I + \hat{K}S)^{-1} \tag{3.45}$$

$$\hat{K} = -(U^TZU)^{-1}U^TZ \times R\Phi^{-1}V^T(V\Phi^{-1}V^T)^{-1} \tag{3.46}$$

$$\Phi = Z - R^T(U^\perp)^T \times \left(U^\perp Z^{-1}(U^\perp)^T\right)^{-1} U^\perp R \tag{3.47}$$

と定めることにより，(3.23) 式を満たす補償器が得られる [4]．

補題 3.1 *[27]* $B \in \mathbf{R}^{n\times m}, C \in \mathbf{R}^{k\times n}, Q = Q^T \in \mathbf{R}^{n\times n}$ とし, $\mathrm{rank}(B) < n, \mathrm{rank}(C) < n$ を仮定する. このとき

$$BGC + (BGC)^T + Q < 0 \tag{3.48}$$

を満たす $G \in \mathbf{R}^{m\times k}$ が存在するための必要十分条件は

$$B^\perp Q B^{\perp T} < 0, \quad C^{T\perp} Q C^{T\perp T} < 0 \tag{3.49}$$

が成り立つことである. また, *(3.49)* が成立し,

$$B^TB > 0, \quad CB^{\perp T}B^\perp C^T > 0 \tag{3.50}$$

が成立するとき, *(3.48)* を満たす G は次のように選べる.

$$G = (C_1^T - Q_{12}Q_{22}^{-1}C_2^T)(C_2Q_{22}^{-1}C_2^T)^{-1} \tag{3.51}$$

ただし

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} B^\dagger \\ B^\perp \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} B^{\dagger T} & B^{\perp T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} := C \begin{bmatrix} B^{\dagger T} & B^{\perp T} \end{bmatrix}$$

注意 **3.6** *(3.46)* 式で定められる $\hat{K}$ より

$$(U^TZU)^{-1}U^TZR = \begin{bmatrix} * & * \\ Z_2^{-1}Z_3^TT_\alpha NG_{11}T_\alpha^T & 0 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

$$N = I - G_{12}(\hat{G}_{12}^TX^{-1}\hat{G}_{12})^{-1}\hat{G}_{12}^TX^{-1} \tag{3.53}$$

が得られ，また

$$Z_2^{-1}Z_3^TT_\alpha = \begin{bmatrix} Z_{z2}^{-1}Z_{z3}^T & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\alpha}Z_{\theta 2}^{-1}Z_{\theta 3}^T & 0 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

となる．よって，$\alpha = 1$ のとき，補償器の係数行列 $\tilde{C}_1$，$\tilde{D}_{11}$，$\tilde{D}_{12}$ は 0 になり，補償器は θ に依存しない．すなわち，推定精度がもっとも悪い状況では，パラメータの推定値を利用しない補償器となっており，この意味でロバスト制御と整合性がとれている結果である．

注意 **3.7** *(3.39)* 式，*(3.40)* 式 に従って Z_z，Z_θ を定めると，補償器の次数 $\tilde{n}$ および利用するパラメータ θ の個数 $\tilde{q}$ は，それぞれ

$$\tilde{n} = \mathrm{rank}\,(I - X_zY_z), \quad \tilde{q} = \mathrm{rank}\,(I - X_\theta Y_\theta) \tag{3.55}$$

となる．したがって，$X_z = Y_z^{-1}$ となる X_z，Y_z が得られた場合には静的補償器が得られる．また，$X_\theta = Y_\theta^{-1}$ を満たす X_θ，Y_θ が得られた場合には，θ を利用しない補償器が得られる．

3.4.3 α を用いた実装時の調整

定理 3.1 からわかるように，補償器の設計には多くの計算量が必要となる．一方，推定精度 α は，あらかじめ正確にわかっているとは限らず，実装時に調整を行いながら定められる場合もある．このような場合に，さまざまな推定精度 α に対して設計を繰り返すのは実用的ではない．そこで，補償器設計の各段階で，それぞれ異なる推定精度を用いる，つぎのような設計法を考える．

Step 1: $\alpha = \alpha_Z$ として，(3.24) 式) $\sim$ (3.28) 式を満たす X，Y を求め，Z を導出する．

Step 2: $\alpha = \alpha_K$ として，(3.18) 式) $\sim$ (3.20) 式より R，U，V，S を求める．さらに，これらの行列と **Step 1** で得られた Z を用いて，(3.45) 式) $\sim$ (3.47) 式より補償器 $\mathcal{K}(z)$ を求める．

Step 3: $\alpha = \alpha_p$ として (3.9) 式より θ_p を構成する．この θ_p と **Step 2** で得られた補償器 $\mathcal{K}(z)$ とプラント $\mathcal{G}(z)$ より，(3.17) 式の G_{cl} を求める．

Step 4: **Step 3** で得られた G_{cl} に対し，(3.23) 式を満たすスケーリング行列 $Z \in \mathbf{Z}$ が存在するような最小の γ を求める．

α_Z は設計時に想定されている推定精度であり，α_p は実際の制御対象がもつ推定精度である．理想的には，$\alpha_Z = \alpha_p$ であるが，実際には，この関係は必ずしも成立しない．このような場合，α_p を用いて補償器を再設計する必要がある．しかしながら，一般に X，Y は繰り返し計算によって求められるため，その再計算は多くの計算量を必要とする．これに対し，推定精度の相違に起因する影響を緩和するために，Z と α_K を用いて補償器を再計算すると，繰り返し計算を行うことなく，制御系の再構成が可能となる．この場合，補償器の再計算に必要な計算量は，X，Y の再計算に比べれば，無視できる程度であり，実装時の調整パラメータとして α_K を用いることができる．

例として，Fig. 3.1 および (3.1) 式 で与えられる制御系を考える．このとき，$\mathcal{G}(z)$ の実現を

$$\mathcal{G}(z) = \left[\begin{array}{c|cc:c} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{3.56}$$

と与えることができる．

(case 1) $\alpha_Z = \alpha_K = 0.5$，$\alpha_p = \alpha$ の場合，すなわち $\alpha = 0.5$ として設計した補償器を実際の制御対象に接続した場合には，α と γ の関係は Fig. 3.6 の点線で示される．$\alpha > 0.5$ では α の増加に伴って性能が著しく劣化し，$\alpha = 1$ では $\gamma = 26.2$ にまで達する．一方，$\alpha < 0.5$ では推定精度が良くても性能は改善されないことがわかる．

(case 2) つぎに，$\alpha_Z = \alpha_K = \alpha_p = \alpha$ の場合を考える．これは，実際の推定精度に応じて設計した補償器を用いた場合である．Fig. 3.6 の実線は，このときの α と γ の関係を示している．この例から，推定精度の悪化にしたがって性能は劣化していくが，安定性は保証されていることがわかる．

(case 3) 最後に，$\alpha_Z = 0.5$，$\alpha_K = \alpha_p = \alpha$ の場合を考える．これは，$\alpha = 0.5$ として X，Y を求め，実際の推定精度を用いて補償器を調整した場合である．このときの α と γ の関係を，Fig. 3.6 の破線で示す．これを点線 (case 1) の場合と比較することにより，設計時とは異なる推定精度に対しても，補償器を調整することにより性能の改善が期待できることがわかる．

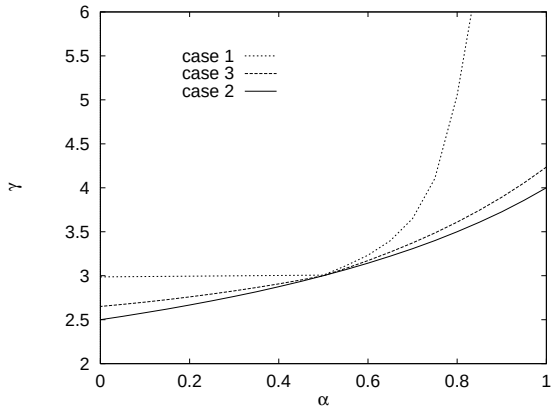


Fig. 3.6: Performance Criteria γ for Each α: $(\alpha_Z, \alpha_K) = (\alpha, \alpha)$, $(0.5, \alpha)$, $(0.5, 0.5)$, $\alpha_p = \alpha$

3.5 パラメータモデルの拡張

3.5.1 双一次関数の導入

パラメータモデル (3.9) 式は，パラメータ θ_p の任意の値に対し，一様な推定精度 α で推定できる状況を表わしている．しかし実際には，θ_p が小さい程よりよい精度で推定できる等，推定精度 α が θ_p に依存する場合も存在する．

ここでは，このような場合を表現する一つの方法として，双一次関数を用いたパラメータモデル

$$\theta_p = \frac{\theta_\delta + \beta}{1 + \beta\theta_\delta};\ |\beta| < 1 \tag{3.57}$$

$$\theta_\delta = (1 - \alpha)\theta + \alpha\delta \tag{3.58}$$

を導入する．これは，前節まで用いてきた (3.58) 式 のモデルを，(3.57) 式) 式の双一次関数で変換したものである．(3.57) 式) 式の双一次関数は，任意の $\beta;\ |\beta| < 1$ に対して，

$$|\theta_p| \le 1 \Leftrightarrow |\theta_\delta| \le 1 \tag{3.59}$$

となることが知られている [28]．よって，$|\theta| \le 1$，$|\delta| \le 1$ のとき，$|\theta_p| \le 1$ となり，θ_p のクラスは β に依存しない．しかし，θ に対する θ_p の存在範囲の大きさは一様ではなく，θ によって変化する．例として，$\beta = -1/2$，$\alpha = 1/3$ とした場合，θ が小さい程，θ_p の変動範囲が小さくなる (Fig. 3.7 参照)．このように，双一次変換を用いることによって，θ_p のクラスを変えることなく，θ に依存する推定精度を表現することができる．

ところで，(3.57) 式の双一次変換は，次のような LFT

$$\theta_p = \mathcal{F}_u(M_\beta, \theta_\delta) \tag{3.60}$$

$$M_\beta = \begin{bmatrix} -\beta & \sqrt{1-\beta^2} \\ \sqrt{1-\beta^2} & \beta \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

を用いて表現することができる．したがって

$$\tilde{\mathcal{G}}(z) = \mathcal{S}\left(M_\beta, \mathcal{G}(z)\right) \tag{3.62}$$

で定義される $\tilde{\mathcal{G}}(z)$ を，改めて $\mathcal{G}(z)$ と考えることにより，前節までの手法を用いて補償器の設計を行うことが可能である (Fig. 3.8 参照)．

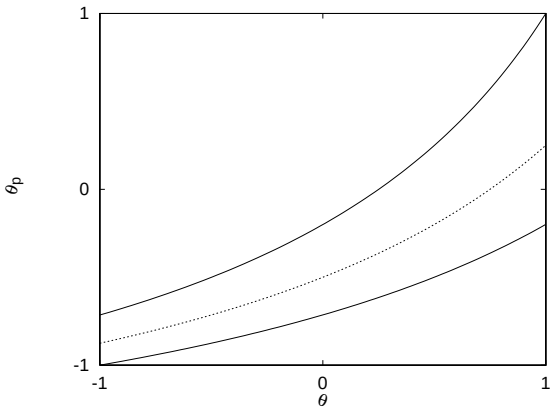


Fig. 3.7: Relationship between θ and θ_p under a Bilinear Transformation ($\beta = -1/2$, $\alpha = 1/3$)

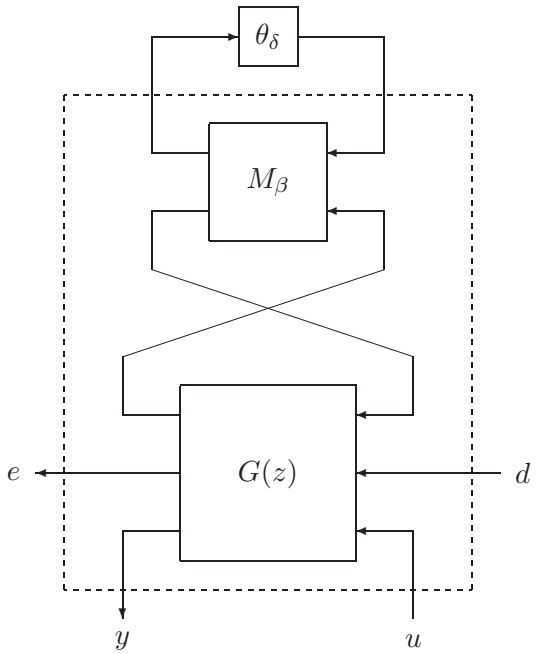


Fig. 3.8: Modification of Plant Corresponding to Bilinear Transformation

3.5.2 応用例および数値例

第 3.2 節 で示した切り替え型補償器の設計問題を考える．Fig. 3.4 では，集合 N，G，P の幅は等しいとしたが， ここでは θ が大きい方がより正確に推定できる場合を考える．

θ および，それに対する θ_p の存在範囲が

$$\theta_p \in \begin{cases} N' : [-1, 1/2] & \cdots \quad \theta = -1 \\ G' : [0, 4/5] & \cdots \quad \theta = 0 \\ P' : [1/2, 1] & \cdots \quad \theta = 1 \end{cases} \tag{3.63}$$

と与えられているとする (Fig. 3.9 参照)．このとき，制御系の θ と θ_p の領域は，Fig. 3.10 中の 3 本の太い実線で示される範囲となる．この実線の領域を (3.9) 式のモデルを用いて表現すると，$\alpha = 4/5$ としたものに対応する点線で囲まれる領域が得られ，保守的な表現となることがわかる．一方，双一次変換を用いた場合，$\alpha = 1/2$，$\beta = 1/2$ とすると，実線で示されるような，より保守性の低い表現が得られる．

Fig. 3.1 および (3.1) 式 で与えられる制御系に対して以上の設定を行い，達成できる性能を比較すると，双一次変換をしない場合 ($\alpha = 4/5$，$\beta = 0$) には，$\gamma = 3.5$ (Fig. 3.6) であるのに対し，双一次変換を用いた場合 ($\alpha = \beta = 1/2$) には $\gamma = 3.0$ となり，より良い性能が得られることがわかる．

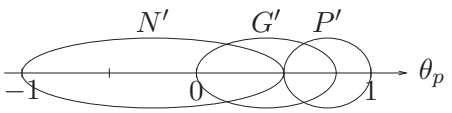


Fig. 3.9: Range of θ_p Corresponding to $\theta = -1, 0, 1$

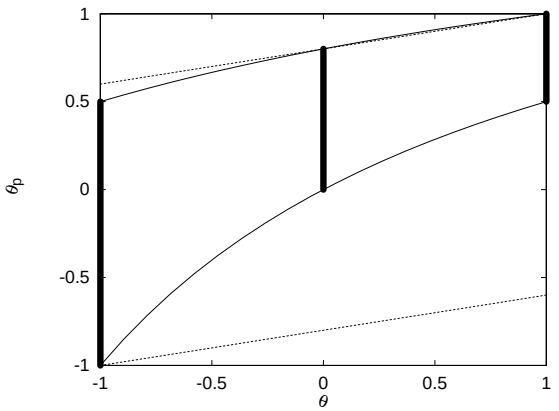


Fig. 3.10: Parameter Models for N', G', P'

3.6　結言

本章では，推定可能なパラメータをもつプラントに対して，推定誤差を考慮したゲインスケジューリング型のロバスト制御系の構成法を示した．さらに，プラントのパラメータモデルとして，双一次関数に基づくモデルを提案し，その効果について調べるとともに，数値例により，その有効性を示した．

提案手法は，パラメータ推定器が与えられたという前提のもとでの制御系の設計法であるが，達成すべき制御系の性能指標が与えられた場合に，用意すべき推定器の推定精度の評価基準を与えるものとも考えられる．

本章で得られた結果は，現実のパラメータ依存のプラントに対して制御系設計を行う場合に重要な知見を与えている．すなわち，パラメータが推定誤差をともなう場合には，直接パラメータをゲインスケジューリングする補償器を設計すると，設計が保守的となり，パラメータを用いないロバスト制御の場合に比べて制御性能が劣化することがある．これに対して，パラメータの両端点を推定精度に応じて切り詰めると，設計の保守性を低減させることができ，制御性能を向上させることができる．

つぎの章では，この知見に基づいて，センサ電圧をパラメータとする超音波モータの回転速度制御系を構成する．

第4章　ゲインスケジューリングに基づく超音波モータの回転速度制御

本章では，超音波モータの非線形特性を陽に考慮した高精度な回転速度制御系を設計する．そのために，まず，ステータのセンサ電圧の情報を利用することにより，超音波モータの非線形特性を表現するプラントモデルを提案する．つぎに，提案するプラントモデルを用いてより高い制御性能を得るために，ゲインスケジューリング補償器の構造を用いることを考え，ゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御を適用してステータのセンサ電圧に依存する補償器を系統的に設計する．その際，前章の知見に基づき，センサ電圧に閾値をもうけ，端点を切り詰めたスケジューリングパラメータを補償器で利用することとする．また，速度制御実験を行い，提案手法の有効性および問題点を検討する．

4.1　緒言

本章では，第 2 章 で述べた超音波モータの持つ 3 つの問題のうち問題 1) 非線形かつ温度に依存する動特性に着目し，ゲインスケジューリングに基づく回転速度制御系を構成する．そのためにまず，超音波モータの非線形特性を表現するプラントモデルを導出する．さらに，このプラントモデルを用いて，ゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御に基づく超音波モータの速度制御系を提案する．なお，本章では超音波モータの非線形特性に主眼をおくため，回転同期の速度変動の問題を考慮しないが，第 5 章 に示す手法を用いて繰返し補償器を付加することにより，さらに制御性能が向上すると考えられる．

本章の構成はつぎの通りである．4.2 節で実験装置の概要を説明する．4.3 節で非線形特性を表すプラントモデルを導出し，実験的にプラントを同定する．このプラントモデルを用いて 4.4 節でゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御を適用して補償器を設計する．4.5 節では速度制御実験を行い，従来の $\mathcal{H}_\infty$ 制御の場合と実験結果を比較し，提案手法の有効性を示す．

4.2　実験装置

超音波モータは摩擦により発熱し，ステータの共振周波数が徐々に低下する．よって，回転速度を一定に保つためには，ステータの振動状態を検出し，それに応じて加振周波数を調整する必要がある．本章の制御対象である進行波型超音波モータ (新生工業製 USR-60) には，ステータに生じる振動振幅に比例した交流電圧 (以下，センサ電圧) を検出するための端子が設けられいる [29]. そこで本章では，センサ電圧をプラントのパラメータとして利用することを考え，まず，センサ電圧とプラントの非線形特性

の関係を実験的に調べることにする．なお，センサ電圧 (0 ~ 約 120 Vpp) は，全波整流, 平滑化を行い直流電圧に変換した後，A/D 変換 (4MHz, 8bit) してからパソコンに取り込み，50 サンプルの移動平均をとったものを実験に利用する．これを以下あらためてセンサ電圧 v_s と表記する．

実験装置のブロック線図を Fig. 4.1 に示す．補償器はパソコン上のプログラムとして実装される．パソコンは超音波モータドライバに加振周波数 u (約 40 kHz) を指示する．ドライバはその周波数の高周波電圧 (約 $150V_{pp}$) をステータの圧電素子に印加する．ドライバの周波数分解能は 0.25 Hz, 周波数設定時間は 10 nsec 以下である．ロータの回転速度 y は，ロータリエンコーダ (3600 ppr) の出力パルスの間隔をカウンタ (14MHz, 16bit) で計測することにより得られる (1 rps 時，分解能 0.0003 rps). 実験は全て無負荷状態で行い，サンプリング周期は 1 msec とした．

注意 **4.1** 瞬間回転速度が r *[rps]* のときのカウンタにおけるカウント値は，ロータリエンコーダの一周当たりのパルス数を P *[ppr]*, カウンタのクロック周波数を X *[Hz]* とすると，$\frac{X}{Pr}$ と定まる．よって，瞬間回転速度が Δr だけ増加したときに，カウント値がちょうど 1 だけ減少したとすると，つぎの式が成り立つ．

$$\frac{X}{P(r+\Delta r)} - \frac{X}{Pr} = -1$$

これを Δr について解くと，

$$\Delta r = r \cdot \frac{1}{1+\frac{X}{Pr}}$$

を得る．本実験装置の仕様より $P = 3600$ *[ppr]*, $X = 14318180$ *[Hz]* を代入し，回転速度 $r = 1$ *[rps]* のときの Δr を求めると，約 0.0003 *[rps]* となる．

Fig. 4.2 に開ループ運転時の加振周波数とロータ一回転当たりの平均回転速度の関係を示す．加振周波数は 42.0 kHz から 40.3 kHz まで，100 Hz ずつ 5 秒ごとに減少させている．このとき平均回転速度は 0.3 rps から 2 rps まで単調に増加しており，加振周波数を変化することにより回転速度を幅広く制御できることが期待できる．

4.3　モデリング

超音波モータの解析的モデルは得られていないため, ここでは実験的にプラントモデルの同定を行う.

4.3.1　閉ループ周波数応答実験

sin sweep 同定実験を行い加振周波数から回転速度までの周波数応答を求めてプラントを同定する．ただし本モータでは回転同期の周期的な速度変動が大きいため，sin sweep のテスト周波数を速度変動の周波数成分から離してプラントを同定する必要がある．ところが本モータではさらに，開ループ運転時に平均速度が徐々に低下する問題があり速度変動の周期が一定にならない．よって開ループ同定実験を行うと，得られた周波数応答は速度変動の影響を強く受け，プラントを正確に同定することが難しくな

る．そこでここでは，あらかじめ設計した PI 補償器を用いて閉ループ系を構成し，目標回転速度をある値まわりで正弦波的に変化させることにより，速度変動の周期を一定に保った上で閉ループ同定実験を行う．

Fig. 4.3 に閉ループ系を示す．破線で囲んだ部分は，Fig. 4.1 の破線部に対応する．$\mathcal{P}$ が同定すべきプラントモデルで，この出力に速度外乱 d が加わると仮定する．r, u, y はそれぞれ，目標回転速度，加振周波数, 回転速度である．$\mathcal{K}$ はあらかじめ設計した PI 補償器である． ここで，目標速度 r を，中心

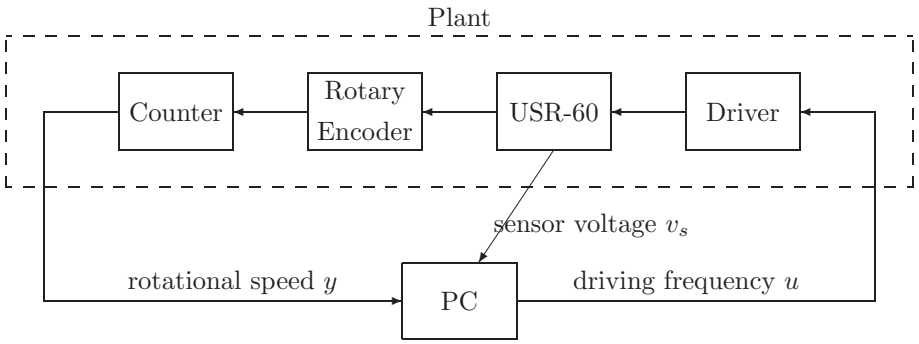


Fig. 4.1: Block Diagram of Experimental Apparatus

Fig. 4.2: Average Rotational Speed vs Driving Frequency

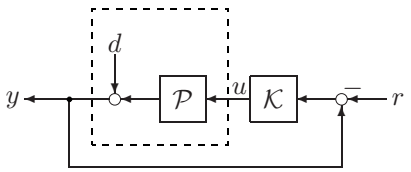


Fig. 4.3: Closed-loop System

値 $\bar{r}$, 振幅 R, 周波数 $f_i (i = 1, \cdots, k)$ の正弦波として

$$r = r_i = \bar{r} + R\sin(\omega_i t), \quad \omega_i := 2\pi f_i \tag{4.1}$$

と与えたとき，$\mathcal{P}$ が動作点まわりで線形であると仮定すれば，対応する u, y は近似的につぎのように表される．

$$u = u_i = \bar{u} + U_i \sin(\omega_i t + \psi_i) \tag{4.2}$$

$$y = y_i = \bar{y} + Y_i \sin(\omega_i t + \psi_i + \phi_i) + d \tag{4.3}$$

$\bar{u}, \bar{y}$ が動作点に対応する．ここで，速度外乱 d はロータの回転にほぼ同期することから，回転同期の周波数 $(\bar{r})$ の整数倍の周波数成分とテスト周波数 f_i が近付かないように $\bar{r}, f_i$ を設定すれば，y における外乱 d の影響を小さくすることができる．このとき，周波数 f_i におけるプラントの周波数応答はつぎのように表される．

$$\mathcal{P}(j\omega_i) = \frac{Y_i}{U_i} e^{-j\phi_i} \tag{4.4}$$

振幅 R を 0.1 rps 固定とし，動作点の違いによるプラントの非線形性を考慮するため目標速度の中心値 $\bar{r}$ を $0.2 \sim 1.8$ rps の範囲で数点選び，各 $\bar{r}$ に対してテスト周波数 f_i を 1 から 400 Hz まで変化させ，u, y とセンサ電圧 v_s を同時測定した．ただし，速度外乱 d の影響を小さくするために，$\bar{r}$ と f_i が一致しないように設定した．u, y を FFT 解析し，ゲイン $(|Y_i/U_i|)$ と位相 (ϕ_i) を計算した結果を Fig. 4.4 に示す．ゲイン特性，位相特性が大きくばらついているが，これは後述するように，センサ電圧のばらつきに対応している．また，位相特性が約 -180 deg から始まっているが，これは Fig. 4.2 に示したように，加振周波数を高くすると回転速度は逆に低くなることを意味している．

低周波領域 $f_i \leq 100$ Hz におけるプラントのゲインとセンサ電圧 v_s の関係を Fig. 4.5 に示す．v_s が大きくなるとプラントのゲインも大きくなる傾向がある．

4.3.2　センサ電圧に依存しないプラントモデルの導出

周波数応答実験の結果を用いて，センサ電圧に依存しないプラントモデルを決定する．乗法的モデル化誤差を持つつぎのプラントモデルを仮定する．

$$\mathcal{P}(s) = \Big(1 + W_T(s)\delta(s)\Big) P_0(s) \tag{4.5}$$

ここで，$P_0(s), W_T(s)$ はそれぞれノミナルプラント，乗法的モデル化誤差に対する重み関数で，$\delta(s)$ は $\mathcal{BH}_\infty$ の要素である．$P_0(s)$ は

$$P_0(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{4.6}$$

と仮定し，Fig. 4.4 の実験点を最小自乗近似することにより，係数 a_0, a_1, b_0, b_1 を求めた．$P_0(s)$ のゲイン特性を Fig. 4.4 の実線に示す．また，重み関数 $W_T(s)$ は高周波領域におけるモデル化誤差を考慮して

$$W_T(s) = k_T \frac{s + \omega_T}{\omega_T} \tag{4.7}$$

とおき，周波数応答実験から得られるモデル化誤差をできるだけタイトに覆うように係数 k_T, ω_T を決定した．すなわち全ての実験点に対して

$$\left| \frac{\mathcal{P}(j\omega_i) - P_0(j\omega_i)}{P_0(j\omega_i)} \right| \leq |W_T(j\omega_i)| \tag{4.8}$$

の関係を満足する範囲で，k_T をできるだけ小さく，ω_T をできるだけ大きく選んだ．その結果，

$$k_T = 0.8, \quad \omega_T = 2\pi \cdot 25 \tag{4.9}$$

を得た．Fig. 4.6 (a) に $W_T(s)$ のゲイン特性を実線で，モデル化誤差 $\frac{\mathcal{P}(s)-P_0(s)}{P_0(s)}$ のゲインを点で示す．

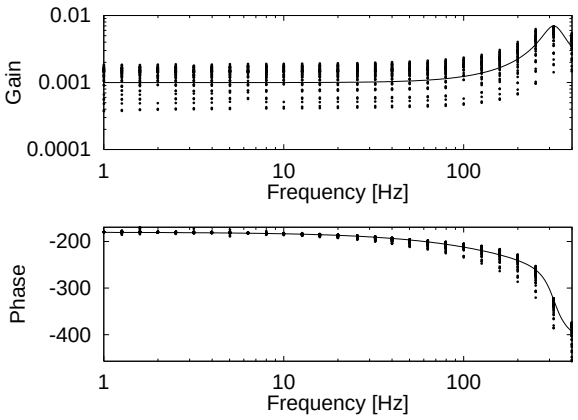


Fig. 4.4: Frequency Response of Plant (dot : measured, line : nominal plant model)

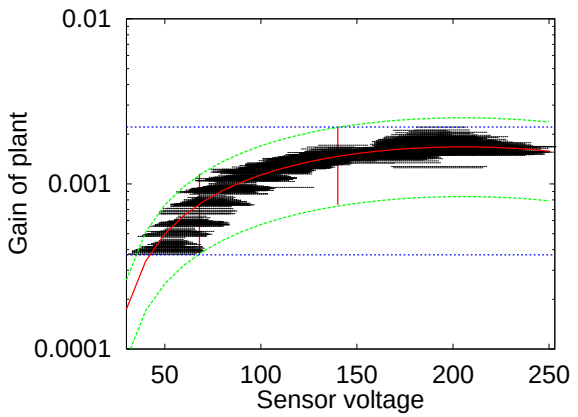


Fig. 4.5: Relationship between Sensor Voltage v_s and Plant Gain (dot : measured, line : gain factor $k(v_s)$)

4.3.3 センサ電圧に依存するプラントモデルの導出

周波数応答実験の結果よりプラントの動特性がセンサ電圧に依存することから，センサ電圧の情報を用いることによりモデル化誤差のより小さなプラントモデルを得ることが期待できる．本節ではセンサ電圧に依存するプラントモデルを提案する．

ここでは，ノミナルプラントがセンサ電圧に依存すると仮定し，センサ電圧に依存しないプラントモデル (4.5) 式のノミナルプラント $P_0(s)$ をつぎのようにセンサ電圧依存の要素 $\mathcal{P}_0(s, v_s)$ におきかえたプラントモデルを提案する．

$$\mathcal{P}(s, v_s) = \Big(1 + W_T(s)\delta(s)\Big)\mathcal{P}_0(s, v_s) \tag{4.10}$$

本章では簡単のため，センサ電圧は主にノミナルプラントのゲイン特性に依存すると仮定し，$\mathcal{P}_0(s, v_s)$ をつぎのようにおく．

$$\mathcal{P}_0(s, v_s) := P_0(s)k(v_s) \tag{4.11}$$

ここで $P_0(s)$ はセンサ電圧に依存しないプラントモデル (4.5) 式のノミナルプラントと共通であり，$k(v_s)$ はセンサ電圧依存のゲインであるとする．

注意 **4.2** 本節で仮定したプラントモデルの位相特性はセンサ電圧に依存しない．しかし実際には，位相特性もセンサ電圧に依存する場合が考えられる．その場合には，位相特性がセンサ電圧に依存するよう

な要素をプラントモデルに導入することにより，さらにモデル化誤差の小さなプラントモデルを得ることができ，制御性能が向上すると考えられる．なお，そのようなプラントモデルを用いる場合でも，後に示す *4.4* 節と同様の手順で補償器の設計を行うことができる．

$k(v_s)$ は，低周波領域において v_s と $\mathcal{P}_0(s, v_s)$ のゲインの関係が Fig. 4.5 の関係をよく近似するように，

$$k(v_s) = k_2 v_s^2 + k_1 v_s + k_0 \tag{4.12}$$

とおき，最小自乗近似を行い係数 k_0, k_1, k_2 を求めた．この結果を Fig. 4.5 の実線に示す．重み関数 $W_T(s)$ は (4.7) 式の形に選び，これらの係数はセンサ電圧に依存しない場合と同様に，モデル化誤差をできるだけタイトに覆うように選んだ．

注意 **4.3** *Fig. 4.5*に示すように，パラメータ v_s とプラントのゲインは *1* 対 *1* に対応しておらず，ばらついている．よって，このばらつきを考慮してプラントモデルを決定する必要がある．そのための一つの方法は，全ての測定された v_s に対して，*(4.10)* 式のプラントモデルの集合が実際のプラントを含むように，重み関数 W_T を調整することである．しかしこの場合には，第 *2* 章 で述べたように，v_s に依存しないプラントモデルに比べて，低周波域における乗法的摂動の大きさを小さくすることができない．これは，v_s が端点に近い場合には，実際には考慮する必要のないモデル化誤差まで考慮することになり，*(4.10)* 式のプラントモデルが保守的になることが原因であると考えられる．よって，第 *3* 章 で得られた知見に基づき，v_s の両端を切り詰めたものをあらためてパラメータとして用いることにより保守性の低いプラントモデルを構成する．具体的には，*Fig. 4.5* では v_s は $30 \sim 253$ の範囲で変化しているが，これを $70 \sim 140$ の範囲で打ち切り nn [1]，以下モデリング，補償器の設計・実装に用いることとする．

その結果，

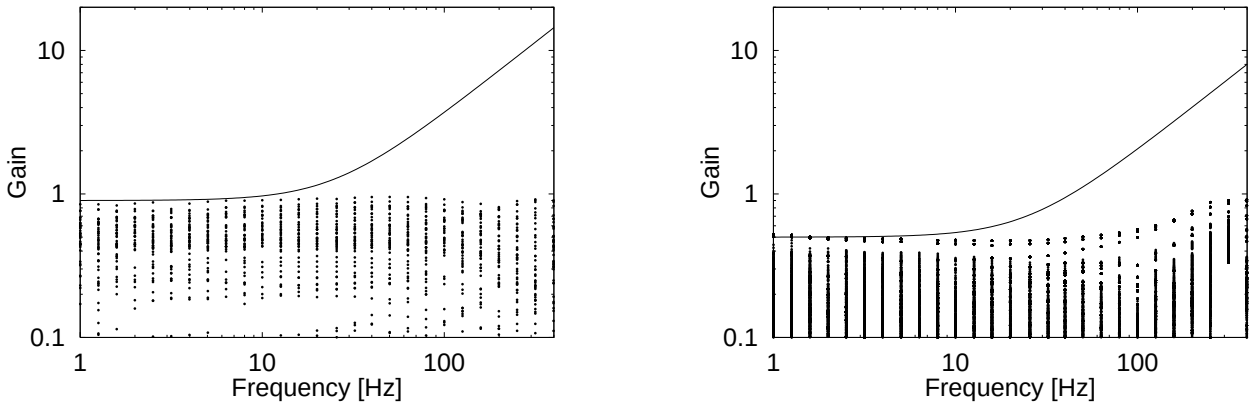
$$k_T = 0.5, \quad \omega_T = 2\pi \cdot 25 \tag{4.13}$$

となった．Fig. 4.6 (b) に $W_T(s)$ のゲイン特性とモデル化誤差を示す．センサ電圧に依存しないプラントモデルと比較すると，センサ電圧の情報を用いることにより，モデル化誤差をより小さく評価できることが確認された．

4.4　補償器の設計

本節では 4.3 節で決定した 2 つのプラントモデルを用いて補償器を設計する．ここでは，モデル化誤差に対する制御系の安定性を確保しつつ外乱抑制性能の向上を図るために，ロバスト性能問題を解くことにより補償器を得ることを考える．

[1] v_s の範囲を狭めていくにつれて，$W_T(s)$ の直流ゲイン k_T を小さく選ぶことができるようになる．しかし，あまり狭めすぎると，k_T はロバスト制御を行う場合よりも大きくなる．よって，k_T をできるだけ小さく選ぶことができるように，パラメータとして用いる v_s の範囲をできるだけ狭める．



(a) Parameter independent plant model (b) Parameter dependent plant model

Fig. 4.6: Model Uncertainty (dots) and Weighting Function (line)

4.4.1 $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の設計

まず，センサ電圧に依存しない従来のプラントモデルを用いて補償器を設計する．以下の設計仕様を考える: あらかじめ与えられた正数 γ と任意のモデル化誤差 $\delta(s) \in \mathcal{BH}_\infty$ に対して，

仕様 **1)** Fig. 4.3 の閉ループ系を内部安定化する

仕様 **2)** $\mathcal{S}(s) := (1 - \mathcal{P}(s)\mathcal{K}(s))^{-1}$ がつぎの条件を満足する

$$\|W_S\mathcal{S}\|_\infty < \gamma \tag{4.14}$$

仕様 **3)** I 型のサーボ系となる

ここで，重み関数 $W_S(s)$ は低周波域における外乱抑制を考えつぎのように設定する．

$$W_S(s) = k_S\frac{\omega_S}{s+\omega_S}, \quad k_S = 50, \quad \omega_S = 2\pi 0.1. \tag{4.15}$$

一般化プラントを Fig. 4.7 のように構成すれば，定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題 [2] を解くことによって，上の設計仕様を同時に満足する補償器 $\mathcal{K}(s)$ を得ることができる．ただし，$\Sigma(s)$ は I 型サーボ系の内部モデルであり，つぎのように与えられる．

$$\Sigma(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

γ の反復計算を行い補償器を設計した結果，$\gamma_{opt} = 0.84$ を達成する補償器を得た．

4.4.2 ゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の設計

つぎに，提案するセンサ電圧依存のプラントモデルを用いる場合，制御性能の向上を図るために，センサ電圧に依存する補償器をゲインスケジューリングにより得ることを考える．

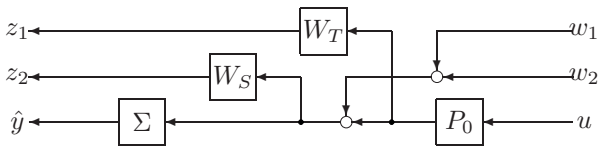


Fig. 4.7: Generalized Plant for $\mathcal{H}_\infty$ Control System

文献 [4] の方法を用いて補償器の設計を行うために，センサ電圧依存のノミナルプラント $\mathcal{P}_0(s, v_s)$ を，v_s のかわりに正規化したパラメータ $\theta \in [-1, 1]$ を用いてつぎのように表しておく．

$$\mathcal{P}_0(s, \theta) = \theta \star H(s) \tag{4.17}$$

$\mathcal{P}_0(s, v_s)$ が (4.11) 式で与えられる場合には，

$$a := \frac{k_{min} + k_{max}}{2}, \quad b := \frac{k_{max} - k_{min}}{2} \tag{4.18}$$

$$k_{min} := \min_{v_s} k(v_s), \quad k_{max} := \max_{v_s} k(v_s) \tag{4.19}$$

とおくと，任意の $v_s \in [v_{s_{min}}, v_{s_{max}}]$ に対して $\theta \in [-1, 1]$ が存在して，

$$k(v_s) = a + b\theta \tag{4.20}$$

を満足するので，$H(s)$ は $P_0(s)$ の実現

$$P_0(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.21}$$

を用いて，つぎのように与えられる．

$$H(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_0 & B_0 b & B_0 a \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ C_0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.22}$$

また，補償器 $\mathcal{K}$ をつぎのように仮定する．

$$\mathcal{K}(s, \theta) = \theta \star K(s) \tag{4.23}$$

注意 4.4 *(4.23)* 式の補償器はパラメータ θ に依存しているため，制御時には，オンラインで計測可能なセンサ電圧 v_s から θ を計算する必要がある．$\mathcal{P}_0(s, v_s)$ が *(4.11)* 式で与えられる場合には，*(4.12)* 式と *(4.20)* 式を用いて θ を逆算すればよい．

以上のもとで，$\mathcal{H}_\infty$ 補償器の場合と同様の設計仕様を考える．ただし，制御中にセンサ電圧が変化することを考慮するため，ここでは θ を時変パラメータとみなした以下の設計仕様を考える: あらかじめ与えられた正数 γ, 任意のモデル化誤差 $\delta(s) \in \mathcal{BH}_\infty$, 任意の速さで変化する時変パラメータ $\theta \in [-1, 1]$ に対して，

仕様 **1')** Fig. 4.3 の閉ループ系を内部安定化する

仕様 **2')** d から y までの時変システム $\mathcal{S}$ が，

$$\|W_S S\|_{\mathcal{L}_2} < \gamma \tag{4.24}$$

を満足する．ここで $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2}$ は $\mathcal{L}_2$ 誘導ノルムを表す．

仕様 **3')** θ を固定したとき I 型サーボ系となる

上の設計仕様を満足する $K(s)$ の設計問題は，文献 [4] と同様に，プラントと補償器双方のパラメータ θ に対するスモールゲイン条件を利用することによって定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に帰着される．すなわち，Fig. 4.8 の閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ に対して，つぎの条件を満足する $K(s)$ と定数スケーリング $D_\theta > 0$, $D_\delta > 0$ を求めれば，(4.23) 式の補償器は設計仕様を満足する補償器となる．

$$\left\| \begin{bmatrix} D_\theta^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & D_\delta^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} G_{cl} \begin{bmatrix} D_\theta^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & D_\delta^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

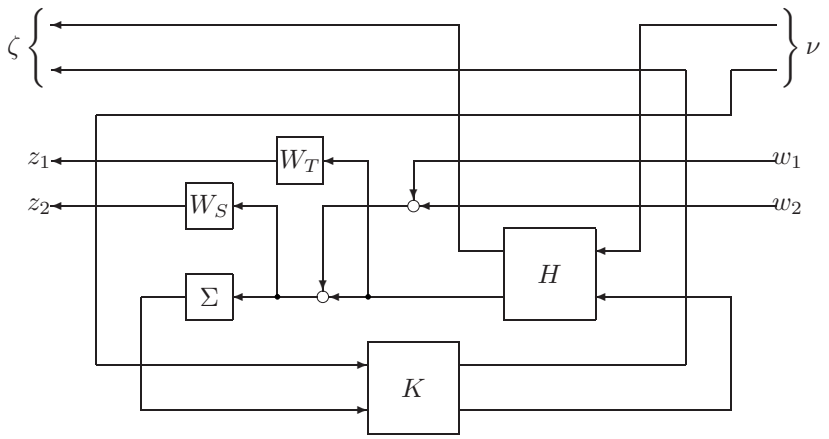


Fig. 4.8: Constant Scaled $\mathcal{H}_\infty$ Control Problem (Gain Scheduling)

重み関数 $W_S(s)$ を (4.15) 式と共通に選び補償器を設計した結果，$\gamma_{opt} = 0.28$ を達成する補償器を得た．これは，センサ電圧の情報を用いることにより，最悪外乱に対する感度が $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の場合に比べて約 $1/3$ に改善されることを意味する．

4.4.3 補償器のゲイン特性の比較

従来の $\mathcal{H}_\infty$ 補償器と提案するゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の違いを調べるために，2 つの補償器のゲイン特性を Fig. 4.9 に示す．破線は従来の補償器のゲイン，実線は提案手法による補償器のゲイ

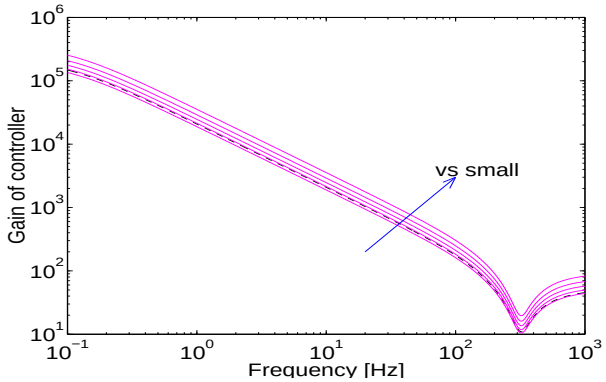


Fig. 4.9: Gain Characteristic of Controllers (solid line: $\mathcal{H}_\infty$ controller, broken line: gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controller; from top, $\theta = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$)

ンで，上から，$\theta = -1$, -0.5, 0, 0.5, 1 の場合に対応している．Fig. 4.5 と (4.20) 式より，v_s が小さくなるにつれてプラントのゲインが下がり，それを補うために提案手法の補償器のゲインが大きくなることがわかる．特に $\theta = -1$ となる場合には，提案手法の補償器のゲインは，従来手法の補償器のゲインの約 3 倍となっている．

4.5　実験結果

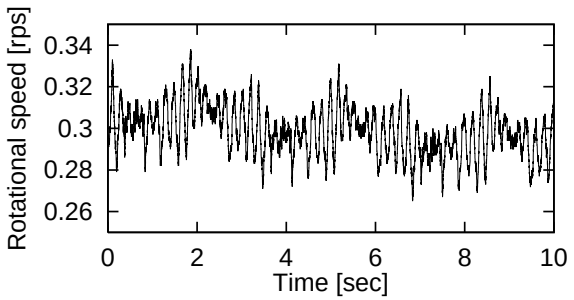
本節では，設計した 2 つの制御系を用いて回転速度制御実験を行い，両者の性能を比較・検討する．制御系の基本的な性能を見るために，まず定速度制御実験を行い，さらにより一般的な運転状況として，目標速度が高速と低速を繰返す場合および負荷トルクが変化する場合を考える．

4.5.1　定速度制御実験

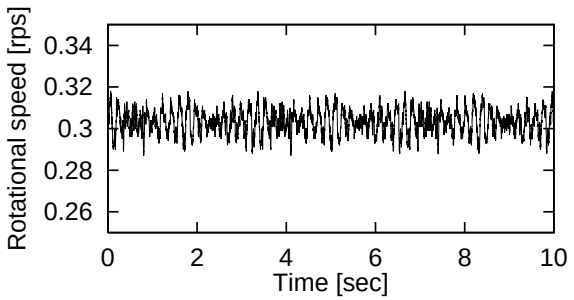
目標速度を一定 (0.3 rps) とし，設計した $\mathcal{H}_\infty$ 制御系および, ゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系を用いて定速度制御実験を行う．また，比較のため，フィードバック制御をかけない (加振周波数を一定とする) 場合の回転速度も測定する．負荷なしの場合と負荷トルク 0.2 Nm の場合の 2 通りについて実験を行った．

Fig. 4.10 に無負荷時の回転速度の時間応答を示す: (a) フィードバック制御なしの場合，平均速度が時間とともに低下する問題が現れ，また速度変動幅 (最高速度 − 最低速度) も大きい．一方，(b)$\mathcal{H}_\infty$ 制御の場合および, (c) ゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御の場合には，このような平均速度低下の現象は見られない．また，速度変動幅は (a), (b), (c) それぞれの場合において，0.065, 0.040, 0.026 rps となっており，(c) 提案手法の場合が最も良い応答を示している．

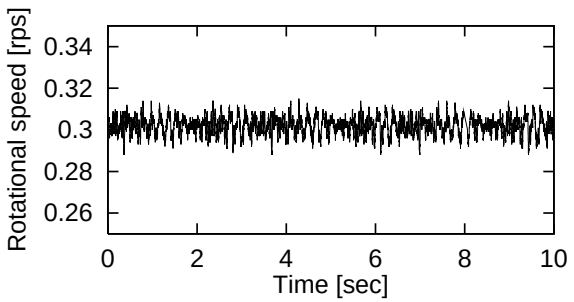
Fig. 4.10 の時間応答波形を FFT 解析した結果を図 Fig. 4.11 に示す．(a) フィードバック制御なしの



(a) without control

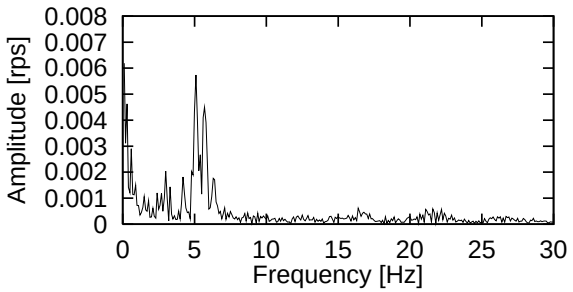


(b) with $\mathcal{H}_\infty$ control

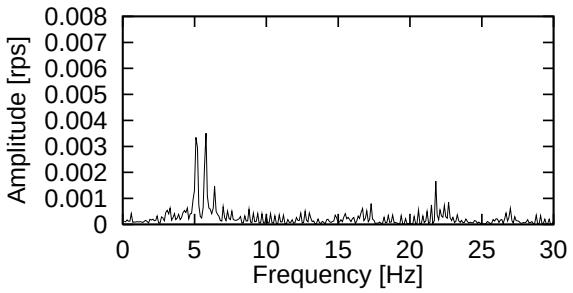


(c) with gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control

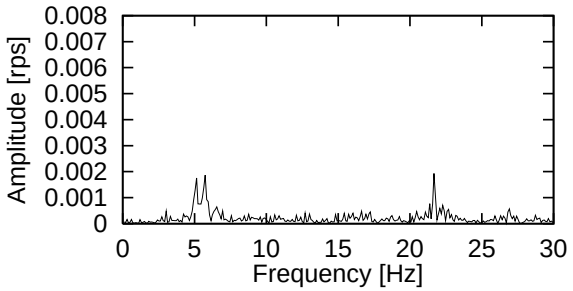
Fig. 4.10: Time Response of Rotational Speed for Constant Reference Speed (without load)



(a) without control



(b) with $\mathcal{H}_\infty$ control



(c) with gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control

Fig. 4.11: FFT analysis of Rotational Speed in Fig. 4.10

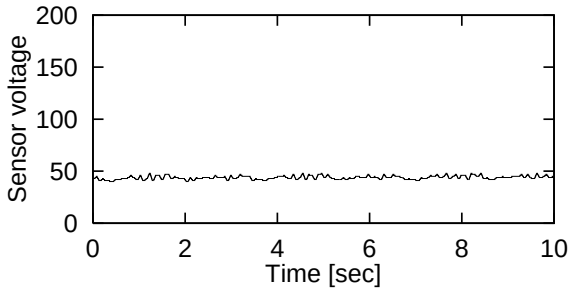
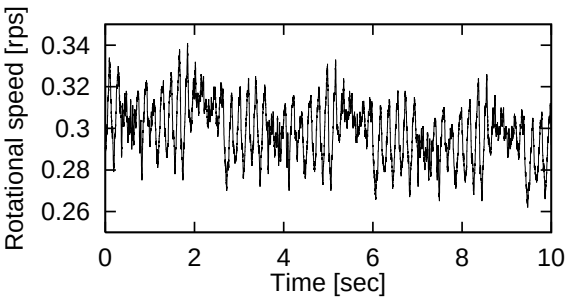
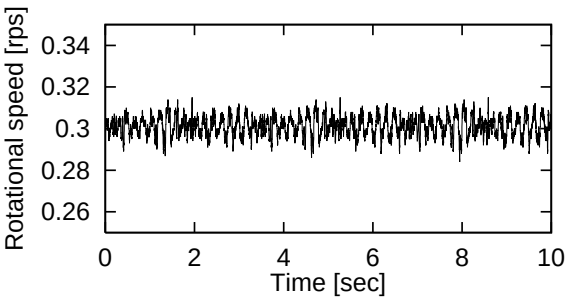


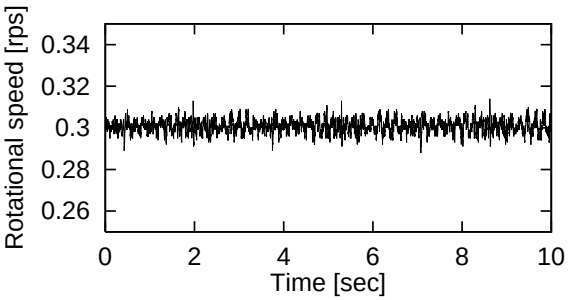
Fig. 4.12: Time Response of Sensor Voltage for Constant Reference Speed (without load)



(a) without control

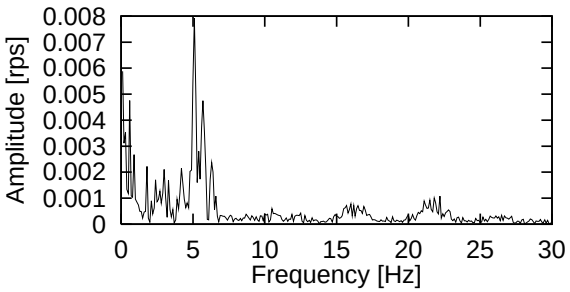


(b) with $\mathcal{H}_\infty$ control

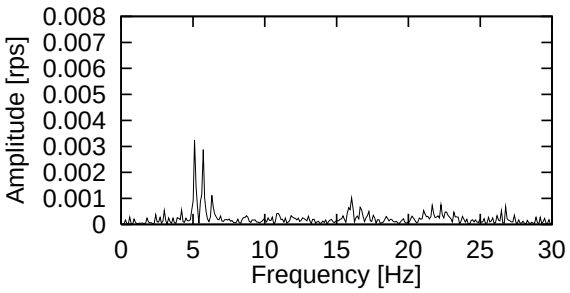


(c) with gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control

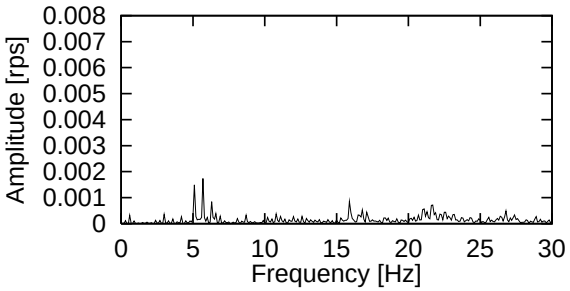
Fig. 4.13: Time Response of Rotational Speed for Constant Reference Speed (without load)



(a) without control



(b) with $\mathcal{H}_\infty$ control



(c) with gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control

Fig. 4.14: FFT Analysis of Rotational Speed in Fig. 4.13

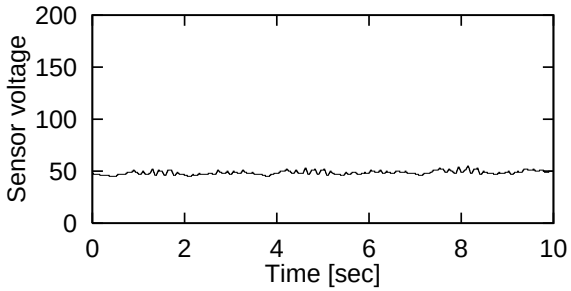


Fig. 4.15: Time Response of Sensor Voltage for Constant Reference Speed (without load)

場合，最も大きなピークは 5.1 Hz で約 0.008 rps となっている．このピークは (b) $\mathcal{H}_\infty$ 制御の場合に 0.003 rps に低減され，さらに (c) 提案手法の場合 0.002 rps に低減された．20 Hz 以下の他の周波数においても，同様の外乱抑制効果が見られ，$\mathcal{H}_\infty$ 制御の場合に比較して提案手法は良好な外乱抑制性能を示している．一方，高い周波数帯域，特に 22 Hz 付近では，フィードバック制御なしの場合には目立ったピークが見られないのに対して，制御した場合には比較的大きなピークが見られる．しかしここでも提案手法の方が，$\mathcal{H}_\infty$ 制御に比べてピークを小さく抑えている ($\mathcal{H}_\infty$ 制御では 0.004 rps, 提案手法では 0.035 rps)．

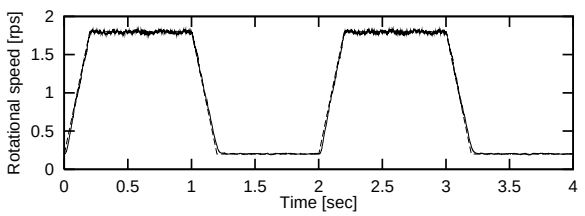
センサ電圧の時間応答を Fig. 4.12 に示す．この実験ではセンサ電圧が比較的小さく，提案手法における補償器のゲインが $\mathcal{H}_\infty$ 補償器に比べて高くなり，外乱抑制性能が向上したと考えられる．

一方，負荷トルクが 0.2 Nm の場合の実験結果を Fig. 4.13, Fig. 4.14, Fig. 4.15 に示す．$\mathcal{H}_\infty$ 制御に比べて，提案手法では無負荷時と同様の制御性能の改善がみられる．

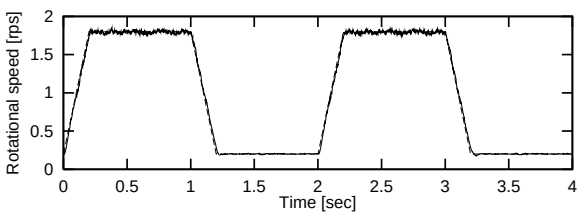
4.5.2 高速と低速を繰返す目標速度に対する速度制御実験

高速と低速を繰返す目標速度が与えられたとして，$\mathcal{H}_\infty$ 制御系およびゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系を用いて速度制御実験を行う．ここでは，低速 0.2 rps と高速 1.8 rps を各 0.8 秒間保持し，それぞれの間を 0.2 秒で直線的に変化する目標速度を考える．負荷トルクは 0.2 Nm に設定した．

実験結果を Fig. 4.16 に示す．破線が目標速度, 実線が回転速度の時間応答である．いずれの場合も目標速度と回転速度はほぼ重なっており，良い制御性能を示している．詳細を比較するために，追従誤差 ($|y - r|$) を Fig. 4.17 に示す．目標速度が高い場合 ($2.2 \sim 3.0$ 秒) には, 従来手法と提案手法はほぼ同等の性能で，目標速度が低い場合 ($3.2 \sim 4.0$ 秒) には，提案手法の方がよりよい性能を示している．また目標速度が変化する際の過渡応答を比較すると，従来手法，提案手法共に，2.0, 3.2, 4.0, 5.2 秒付近で追従誤差が比較的大きくなっているが，提案手法の追従誤差は従来手法の約 2/3 に抑えられている．最後に，Fig. 4.18 に提案手法で用いたセンサ電圧の時間応答を示す．このようにセンサ電圧の変化にともない，スケジューリングパラメータが急激に変化しても，提案手法により設計された制御系は安定性を失っていない．

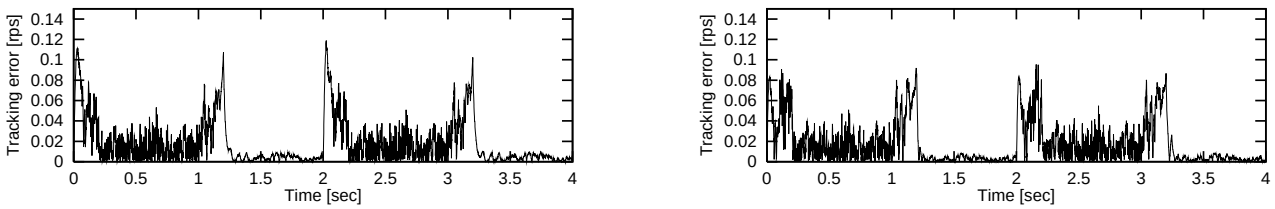


(i) $\mathcal{H}_\infty$ control



(ii) gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control

Fig. 4.16: Time Response of Rotational Speed for Trapezoidal Reference Speed (with 0.2Nm load)



(i) $\mathcal{H}_\infty$ control　　(ii) gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control

Fig. 4.17: Time Response of Tracking Error (with 0.2Nm load)

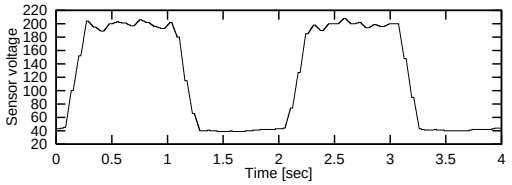


Fig. 4.18: Time Response of Sensor Voltage for Trapezoidal Reference Speed (with 0.2Nm load)

4.5.3　負荷トルク変動を受ける場合の定速度制御実験

負荷トルク変動に対する提案手法のロバスト性を確認するために，負荷トルクをステップ状に変化させて定速度制御実験を行う．ヒステリシスブレーキの電源を ON/OFF することにより，負荷トルクを 0.2 Nm → 0 Nm → 0.2 Nm と変化させた．目標速度は 0.3 および 1.0 rps の 2 通りに設定した．

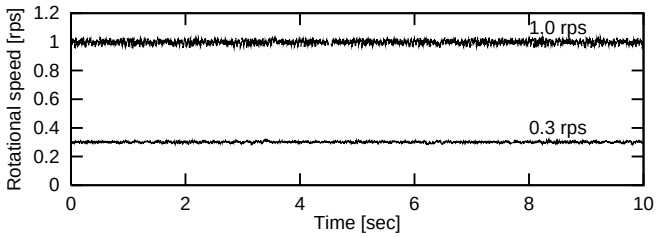
実験結果を Fig. 4.19 に示す．グラフ中，約 3 秒において負荷トルクを 0.2 Nm から 0 Nm に減少させ，約 6 秒において負荷トルクを再び 0.2 Nm に戻している．(i) は回転速度の時間応答を示している．負荷トルクが変化する瞬間に若干回転速度が乱れているが，安定性を乱すことなく定速度制御が行われている．(ii) は制御入力すなわち加振周波数の時間応答を示している．約 3 ~ 6 秒の無負荷時において加振周波数が高くなり，回転速度が上昇するのを抑制していることがわかる．(iii) はセンサ電圧の時間応答を示している．無負荷時には有負荷時に比べてセンサ電圧が若干小さくなっている．このようにセンサ電圧が変化しても，制御系の安定性は損なわれていない．

4.6　結言

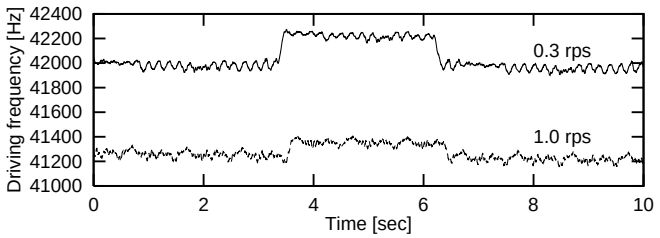
超音波モータの非線形特性を陽に考慮した高精度な回転速度制御系を設計した．具体的にはまず，ステータのセンサ電圧を利用することにより，超音波モータの非線形特性を表すプラントモデルを提案した．つぎに，提案するプラントモデルを用いてより高い制御性能を得るために，ゲインスケジューリング補償器の構造を用いることを考え，ゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御を適用してステータのセンサ電圧に依存する補償器を系統的に設計した．その際，第 3 章 で得られた知見に基づき，端点を切り詰めたセンサ電圧をスケジューリングパラメータとして利用することにより，設計の保守性低減を図った．また，

速度制御実験を行い，提案手法の有効性を確認した．

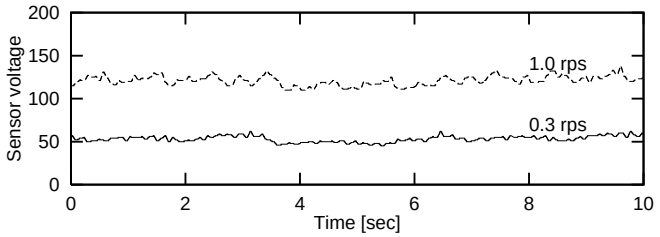
超音波モータは強い非線形特性を持ち，正確なモデリングを行うことは困難であるため，適応制御の応用が盛んに行われてきた．しかし，本章で示したように，センサ電圧の情報を利用してシステム同定を行えば，非線形特性を表現するより正確なプラントモデルを得ることができ，さらに，$\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計などの系統的な設計手法を利用し高い制御性能を比較的容易に得ることができる．



(i) Rotational speed



(ii) Control input (driving frequency [Hz])



(iii) Sensor voltage

Fig. 4.19: Time Response of Gain Scheduled $\mathcal{H}_\infty$ Control System with Load Variation

第5章　修正繰返し制御に基づく超音波モータの回転速度制御

第 3 章, 第 4 章 では，超音波モータの非線形特性に注目し，ゲインスケジューリング補償器の構造を用いた制御系の設計を考えた．本章および 第 6 章 では，超音波モータの周期的な回転速度変動に注目して既存の制御理論を応用する上での問題点を指摘し，これを解決する手法を検討する．

本章では，超音波モータの開ループ時の速度変動がほぼロータの回転に同期していることに注目し，速度変動を外乱と捉えて，修正繰返し補償器を併用した定速度制御系を提案する．そのために，まず，温度上昇をともなう動特性変化を周波数領域の摂動と考え, 混合感度問題を用いて速度変動を抑制する制御系を設計する．つぎに，回転同期の速度変動成分をより積極的に除去するために，制御系の安定性をそこなうことなく制御系に修正繰返し補償器を付加し，周期外乱に対する抑制性能を改善させる．また，実際に速度制御実験を行い，提案手法の有効性および問題点を検討する．

5.1　緒言

本章では，第 2 章 で示した超音波モータの 3 つの問題点のうち，問題 3 の周期的な速度変動に対処するために，修正繰返し補償器を併用した $\mathcal{H}_\infty$ 制御に基づく定速度制御系を構成することを考える．

本章の構成はつぎの通りである．まず 第 5.2 節 で実験装置の概略を示す. つぎに 第 5.3 節 において, 同定実験結果に基づき, 超音波モータのプラントモデルを提案する. 第 5.4 節 では, このモデルに基づき, 問題 1 に対してロバスト安定性を保証する $\mathcal{H}_\infty$ 補償器を設計する. この際, 問題 2 を解決するために, $\mathcal{H}_\infty$ 補償器に積分器を持たせる. さらに, 問題 3 を解決するために, 系の安定性を失うことなく修正繰返し補償器を付加する. 第 5.5 節 において, 提案手法の有効性および修正繰返し補償器の効果を実験的に示す．

5.2　実験装置

Fig. 5.1 に実験装置の概要を示す. 基本的な構成は 第 4 章 と同じである．ただし，超音波モータにはキヤノンの供試モータを用い，センサ電圧を利用しないこととする．また, 超音波モータのドライバ, 回転速度測定用のカウンタの仕様が

コントローラはパソコン上のプログラムとして実装される. パソコンは, 超音波モータドライバに加振周波数 $u(\simeq 32\mathrm{kHz})$ を指示する. ドライバは, その周波数の 2 相の高周波電圧をステータの圧電素子に

印加する. ドライバの周波数分解能は 1 Hz, 周波数設定時間は 10 nsec 以下である. ロータの回転速度 y は, ロータリエンコーダ (3600 ppr) の出力パルスの間隔をカウンタ (14MHz, 12 bit) で計測することにより得られる (2 rps 時, 分解能 0.001 rps).

また, ステータに貼り付けられた熱電対により, ステータの温度を測定できる. なお, 実験はすべて無負荷で行い, サンプリング時間は 1 msec とした.

5.3　モデリング

超音波モータの解析的モデルは得られていないため, ここでは実験的にプラントモデルの同定を行う.

まず予備実験として, 一定の加振周波数 $u = \bar{u}$ で運転し, そのときのロータ平均速度 $y = \bar{y}$ を測定した (Fig. 5.2). 温度変化により, 同一の加振周波数でも約 1 rps の差が生じている. また, 温度が一定であれば, $\bar{u}$ と $\bar{y}$ はほぼ直線関係であることがわかる. よって, プラントモデルの入出力を, それぞれ, 基準周波数 $\bar{u_0}$, 目標速度 $\bar{y_0}$ まわりの偏差 $\Delta u(:= u - \bar{u_0}), \Delta y(:= \bar{y_0} - y)$ に選べば, 低周波域では線形モデルを用いることが妥当であるといえる.

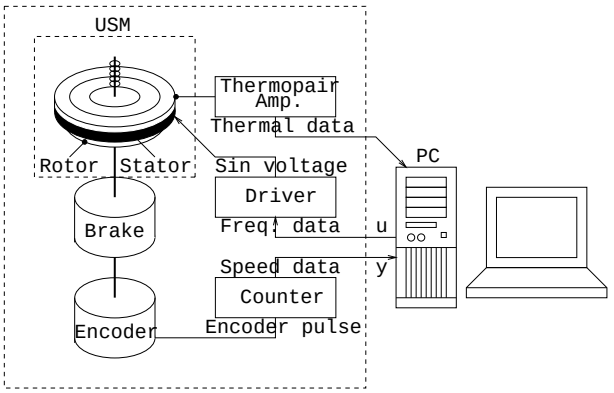


Fig. 5.1: Experimental apparatus of speed control system

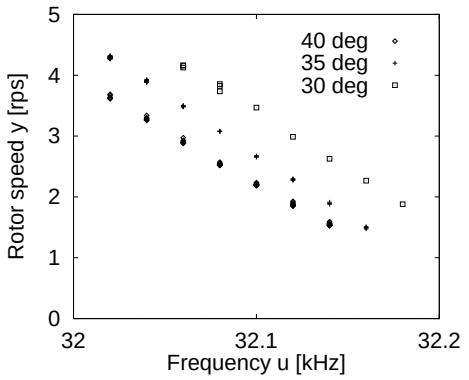


Fig. 5.2: Driving frequency vs rotor speed(average)

ここで, 問題 1, 問題 2, 問題 3 に対して以下を仮定する.

仮定 **1)** 動特性の変化は乗法的摂動で表せる.

仮定 **2)** 温度依存のステップ外乱 d_s がプラントの出力に加わる.

仮定 **3)** 回転同期の周期外乱 d_p がプラントの出力に加わる.

以上より, 速度制御系は Fig. 5.3 のようになる. 点線内部がプラントモデル $P(s)$ で, つぎの式で表される.

$$P(s) = P_0(s)\Big(1 + W_T(s)\delta_m(s)\Big) \tag{5.1}$$

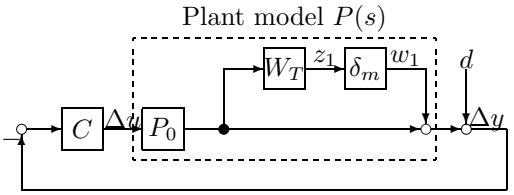


Fig. 5.3: Feedback system

ここで $P_0(s)$ はノミナルプラント, $W_T(s)$ は重み関数, $\delta_m(s) \in \mathbf{BH}_\infty$ は動特性の変動に対応する摂動, $d := d_s + d_p$ は速度外乱である. 補償器 $C(s)$ は, 制御偏差 $\Delta y = 0$ となるように, 制御入力 Δu をプラントに加える.

$P_0(s)$, $W_T(s)$ を決定するため, 1 Hz から 500 Hz までのいくつかの周波数 $f_i, i = 1, \ldots, k$ において, 周波数応答を測定した. すなわち, 加振周波数 u を,

$$u = u_i = \bar{u_0} + \Delta u_i, \quad i = 1, \ldots, k \tag{5.2}$$

$$\Delta u_i = A_i \sin(2\pi f_i t) \tag{5.3}$$

として運転し, このときのロータ速度 y を測定した. 仮定より y はつぎのように表される.

$$y = y_i = \bar{y_0} - \Delta y_i, \quad i = 1, \ldots, k \tag{5.4}$$

$$\Delta y_i = B_i \sin(2\pi f_i t + \phi_i) + d_s + d_p \tag{5.5}$$

実験は, プラントの非線形性と温度変動の影響を考慮するために $\bar{u_0} = 32.05, 32.1, 32.15$kHz として複数回行い, 30 度から 40 度までの範囲で温度が分布するようにした. なお, 実験時の平均速度は $2 \sim 3$ rps であった.

$\Delta u_i, \Delta y_i$ を FFT 解析し, プラントのゲイン特性 ($G_i := |B_i/A_i|$), 位相特性 (ϕ_i) を計算した結果をそれぞれ Fig. 5.4 (a),(b) の点に示す. 問題 1 の影響は, 点のばらつきとなって表れている. また, $200 \sim 400$Hz 付近の大きなばらつきは, 高次の動特性の影響と考えられる.

ノミナルプラント $P_0(s)$ は, 高周波でのゲインと位相の変化を考慮して,

$$P_0(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{5.6}$$

と仮定し, 各係数は実験値を最小自乗近似して決定した. これを Fig. 5.4 の曲線に示す.

つぎに, G_i, ϕ_i をそれぞれ角周波数 $\omega_i = 2\pi f_i$ における $P(s)$ のゲイン, 位相と考え, $W_T(s)$ を 決定する. すなわち, 次式を満たすように $W_T(s)$ を定める.

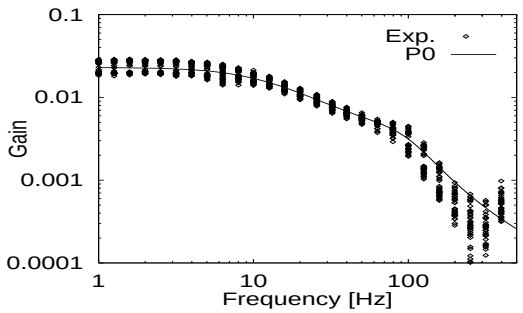
$$|err(j\omega_i)| \leq |W_T(j\omega_i)| \tag{5.7}$$

$$err(j\omega_i) := \frac{P(j\omega_i) - P_0(j\omega_i)}{P(j\omega_i)} \tag{5.8}$$

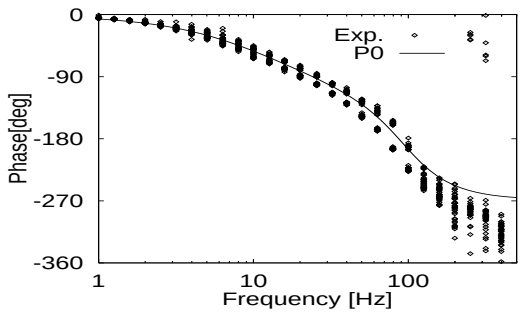
$$P(j\omega_i) := G_i e^{j\phi_i} \tag{5.9}$$

$|err(j\omega_i)|$ および $W_T(s)$ のゲイン特性をそれぞれ Fig. 5.5 の点, 曲線に示す. $2, 4, 6$ Hz におけるピークは, 平均速度が約 2 rps のときの 問題 3 の影響と考えられるので, これらを無視して, $W_T(s)$ はつぎのように選んだ.

$$W_T(s) = k_T \frac{s + \omega_T}{\omega_T}, \quad k_T = 0.3, \quad \omega_T = 2\pi \cdot 50 \tag{5.10}$$



(a)Gain characteristic



(b)Phase characteristic

Fig. 5.4: Frequency response of USM

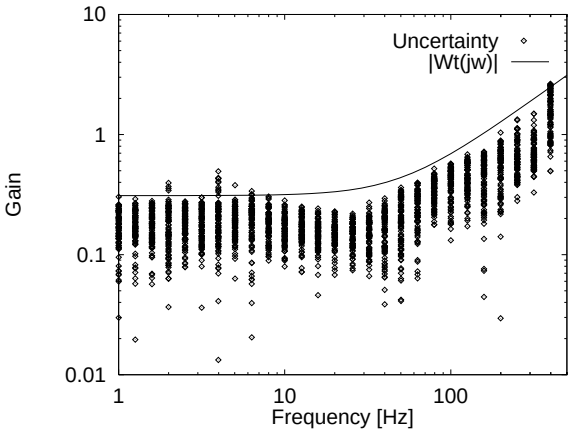


Fig. 5.5: Model uncertainty and weighting function

5.4　補償器の設計

補償器の設計手順は, 2 つのステップからなる. まず, 問題 1 に対するロバスト安定性を保証するために, $\mathcal{H}_\infty$ 補償器を設計する. つぎに, 問題 3 を除去するために, 制御系の安定性を保ちつつ, 修正繰返し補償器を付加する. なお, 問題 2 は修正繰返し制御により解決されるが, 比較のため, $\mathcal{H}_\infty$ 補償器単独で問題 2 を解決するように, 文献 [30] の手法をもちいて, $\mathcal{H}_\infty$ 補償器に積分器を持たせる.

5.4.1　$\mathcal{H}_\infty$ 補償器の設計

ここでは, Fig. 5.3 の制御系において, $C(s)$ を $\mathcal{H}_\infty$ 補償器と考えて設計を行う. $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の設計仕様として, 問題 1 に対するロバスト安定性に加え, ロバスト性能 (感度関数に対する $\mathcal{H}_\infty$ ノルム制約) を考える. これは, 任意の $\delta_m \in \mathbf{BH}_\infty$ に対して, つぎの二つの条件を満たすことである.

仕様 **1)** 閉ループ系は内部安定

仕様 **2)** $\|W_S S\|_\infty < \gamma$

ここで $\gamma > 0$ は制御性能の評価指数で, これが小さいほど制御性能が高くなる. $S(s)$ は摂動 δ_m の影響をうけた感度関数で,

$$S(s) := \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \tag{5.11}$$

で定義される. これは d から Δy までの伝達関数に等しく, 制御系の速度外乱除去性能を特徴づける. すなわち, 仕様 2 は $\mathcal{H}_\infty$ 制御だけでもある程度の制御性能を達成することを要請している. これは, 次節で修正繰返し補償器を付加するために必要な仕様である [31].

$W_S(s)$ は 重み関数で, 低周波数帯域で大きなゲインをもつように, つぎのように選んだ.

$$W_S(s) = k_S \frac{\omega_S}{s + \omega_S}, \quad k_S = 200, \quad \omega_S = 2\pi \cdot 0.1 \tag{5.12}$$

ここでは, Fig. 5.6 に示す定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題 [3] を解き, 仕様 1, 仕様 2 を満たす $\mathcal{H}_\infty$ 補償器を求めた. 具体的には, 図中 $[w_1' \ d]^T$ から $[z_1' \ z_2']^T$ までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが 1 未満になるような補償器 $C(s)$ と定数スケーリング D を求め, 補償器が求まる限り γ を最小化した.

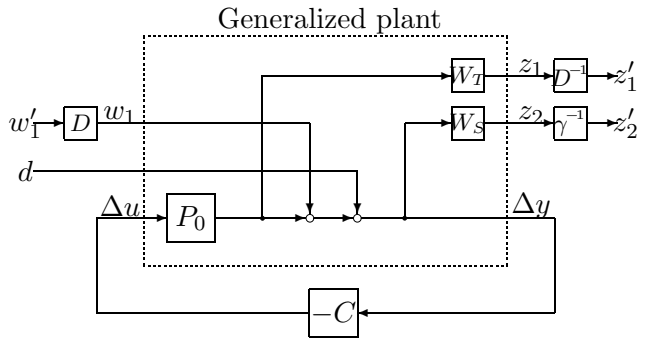


Fig. 5.6: Constant scaled $\mathcal{H}_\infty$ control problem

5.4.2 修正繰返し補償器の付加

周期的な速度外乱を除去するため, 修正繰返し補償器を $\mathcal{H}_\infty$ 制御系に付加する (Fig. 5.7). 以後この系を $\mathcal{H}_\infty$+修正繰返し制御系, あるいは単に修正繰返し制御系と呼ぶ. ここで, $C(s)$ は前節で求めた $\mathcal{H}_\infty$ 補償器である. 修正繰返し補償器はむだ時間要素 e^{-Ls} と, ローパスフィルタ $F(s)$ から構成される. このとき, 文献 [8] 定理 2.4 より, つぎの結果が知られている.

定理 5.1 *Fig. 5.7* の修正繰返し制御系において, むだ時間 L を目標回転速度の周期に一致するように選ぶ. このとき, $F(s)$ が *1* に近い周波数帯域において, $nL(n = 1, 2, \ldots)$ 周期の速度外乱を除去することができる.

つぎの定理は修正繰返し制御系の安定性を保証する.

定理 **5.2** *[8]* 伝達関数 $G(s) := P(s)C(s)$ は不安定な極零相殺を起こさないと仮定する. このとき, *Fig. 5.7* の修正繰返し制御系が内部安定であるための十分条件は, 次の *2* つの条件が成立することである.

条件 **1)** 修正繰返し補償器を付加する前の制御系は内部安定

条件 **2)** $|F(j\omega)| < |1 + G(j\omega)| \quad {}^{\forall}\omega$

前節で求めた $\mathcal{H}_\infty$ 補償器 $C(s)$ は, 安定化補償器であるから, 条件 1 は既に成立している. 後は 条件 2 を満たすように $F(s)$ を設計すればよい. このために, $|1 + G(j\omega)|$ を計算した結果を Fig. 5.8 の破線に示す. ただし, $\delta_m(j\omega)$ は, 単位円内の複素数として適当に与えた.

$F(s)$ は 条件 2 を満たすように, つぎのように選んだ.

$$F(s) = \frac{\omega_C}{s + \omega_C}, \quad \omega_C = 2\pi \cdot 50 \tag{5.13}$$

このときの $|F(j\omega)|$ を Fig. 5.8 の実線に示す.

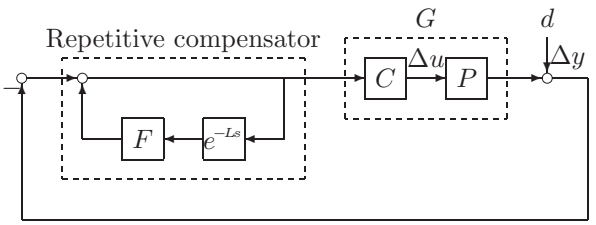


Fig. 5.7: Repetitive control system

5.4.3　感度関数解析に基づく修正繰返し補償器の効果

修正繰返し補償器の効果は, 修正繰返し補償器を付加する前後の 2 つの制御系の感度関数のゲイン特性を比較することによって見ることができる. Fig. 5.9 において, 点線, 実線にそれぞれ $\mathcal{H}_\infty$ 制御系, $\mathcal{H}_\infty$ + 修正繰返し制御系の感度関数のゲイン特性を示す. ただし , むだ時間 $L = 500$ msec としている . $2, 4, 6, \ldots$ Hz において, ゲイン特性が大幅に改善されていることがわかる. 一方 , これらの中間の周波数においては , 修正繰返し補償器を付加することにより , 感度特性が悪化している . 非周期的な外乱成分が大きい場合には注意が必要である .

5.5　実験結果

提案手法の有効性を確認するため, (a) フィードバック制御なし, (b)$\mathcal{H}_\infty$ 制御, (c)$\mathcal{H}_\infty$+修正繰返し制御の 3 つの場合について実験を行った. 目標速度は 2 rps とした. この場合, 問題 3 の影響により, $2, 4, 6 \ldots$

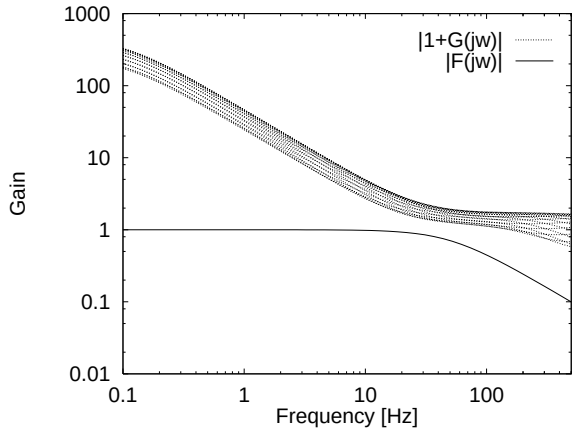


Fig. 5.8: Gain of low-pass filter $F(s)$ and $1 + G(s)$

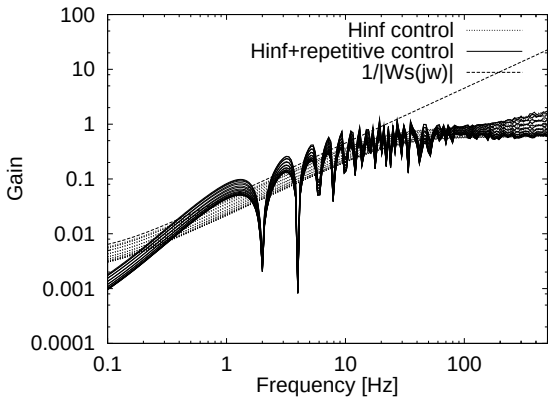


Fig. 5.9: Gain of Sensitivity Transfer Function

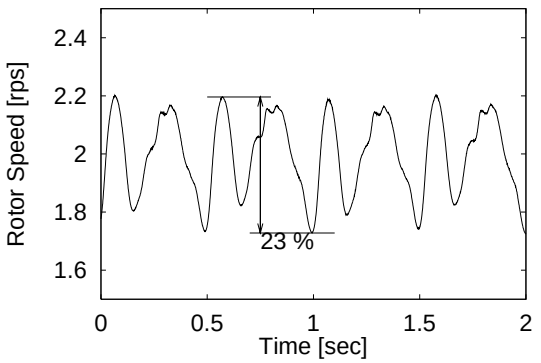
Hz の速度外乱が生じるため, 定理 5.1 より, むだ時間 $L = 500$ msec とし, 周期外乱の除去を試みた. 以下ではステータの温度が 30 度のときの結果を示す.

Fig. 5.10 にロータ速度の時間波形を示す. (a) フィードバック制御なしの場合, 目標速度に対して約 23% の速度変動が観測された. この速度変動は, (b)$\mathcal{H}_\infty$ 制御により 4.7% に低減され, さらに (c) 修正繰返し補償により 0.9% に低減された. なお, グラフは制御開始後約 50 回転後の速度波形を示しているが, 長時間運転した場合でも, 制御系が安定であることを確認している.

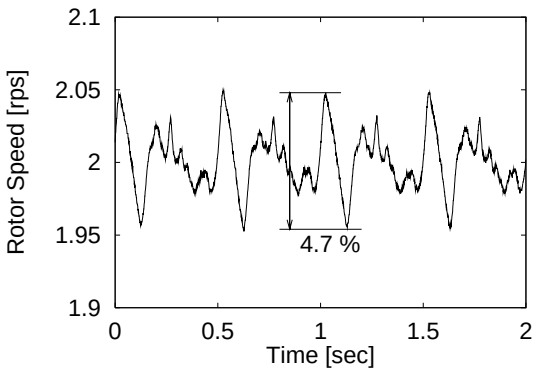
Fig. 5.10 を FFT 解析した結果を Fig. 5.11 に示す. (a) より, 速度変動の主成分は, 回転に同期していることがわかる. 回転の一倍成分 (2 Hz) に注目すると, 速度変動振幅は, (b) $\mathcal{H}_\infty$ 制御により 1/19 に, (c) $\mathcal{H}_\infty$+修正繰返し制御により 1/2000 に低減されていることがわかる. $4, 6, 8, \cdots$ Hz においても同様の改善がみられる.

また, $\mathcal{H}_\infty$ 補償器の温度に対するロバスト安定性を確かめるために, 温度を 40 度まで上昇させて実験を行った. 結果を Fig. 5.12 に示す. 温度が変化しても安定であり, また誤差も少なく良好な応答を示している. 温度を 35 度にした場合も同様な結果を得ており, 温度変化に対するロバスト性が確認できた.

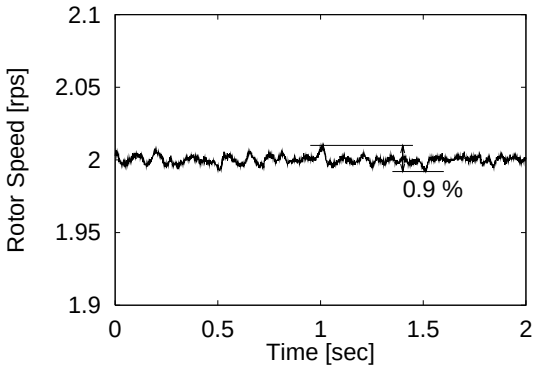
目標速度の変化に対応できることを確認するために, 目標速度を 3 rps にし, むだ時間 $L = 333$ msec として実験を行った. 結果を Fig. 5.13 に示す. この場合も良好な結果を示しており, 目標速度の変化に対して, 提案手法の有効性が確認できた.



(a) without control

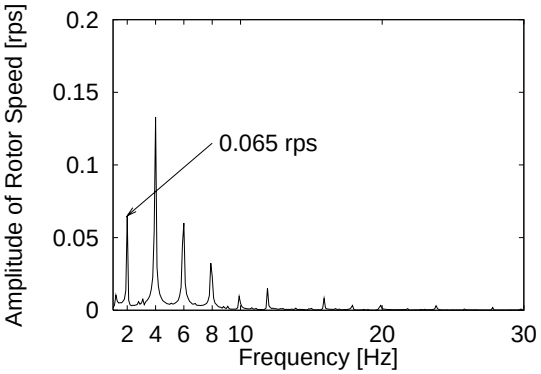


(b) $\mathcal{H}_\infty$ control

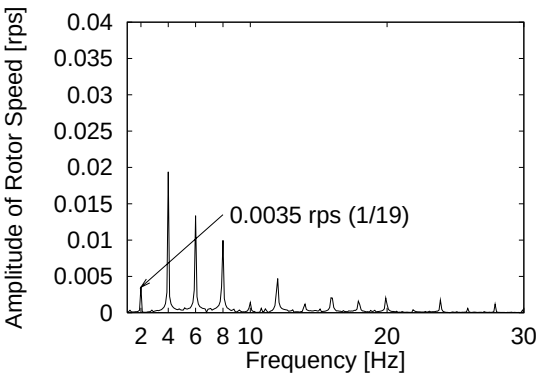


(c) $\mathcal{H}_\infty$+repetitive control

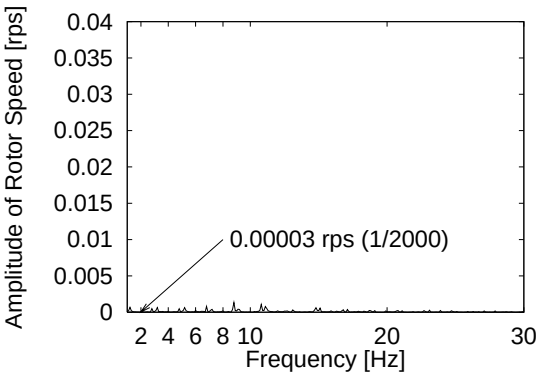
Fig. 5.10: Time response of rotational speed



(a) without control



(b) $\mathcal{H}_\infty$ control



(c) $\mathcal{H}_\infty$+repetitive control

Fig. 5.11: FFT analysis of rotational speed

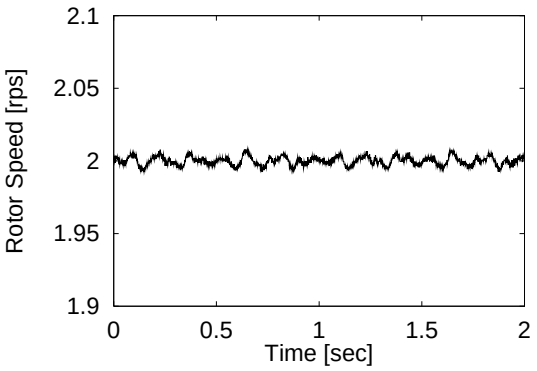


Fig. 5.12: Rotational speed(40 deg)

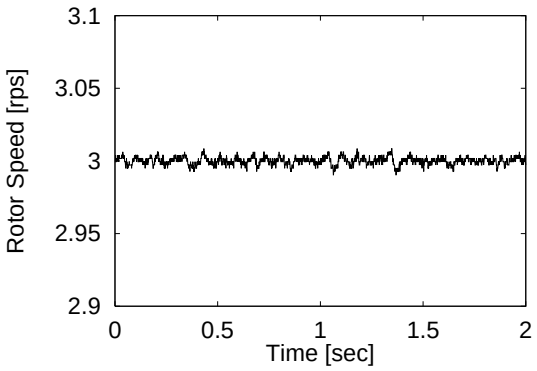


Fig. 5.13: Rotational speed(3 rps)

5.6 結言

本章では，速度変動の周期性に注目し，修正繰返し補償器を併用した $\mathcal{H}_\infty$ 制御に基づく超音波モータの速度制御系を提案した．この手法により, 系の安定性が理論的に保証される. また, ここでの設計手順は系統的であり, 次の 2 つのステップから成る.

1. 動特性変動に対するロバスト安定性を保証するために, $\mathcal{H}_\infty$ 制御系を構成する.
2. 周期的な速度変動を除去するために, 制御系の安定性を保ちつつ修正繰返し補償器を付加する.

また, 提案手法の有効性を確認するために定速度制御実験を行い, つぎの結果を得た.

1. 非制御時に比べ, 速度変動が約 $1/25$ $(23\% \rightarrow 9\%)$ に低減された.
2. 温度が変化 $(30\mathrm{C}^\circ \rightarrow 40\mathrm{C}^\circ)$ しても制御系は安定であった.
3. 修正繰返し補償器のむだ時間を変えるだけで, 異なる目標速度に対しても, 安定性を損なうことなく追従し, 周期外乱を効果的に除去できた.

本章では，繰返し周波数における制御系の感度を小さくするために，予め設計された制御系に修正繰返し補償器を付加する手法を用いた．この手法では，むだ時間要素に対するスモールゲイン条件を用いており，むだ時間要素の位相特性が無視されているため，制御系を再設計することなく異なる周期の外乱に対処できるという利点がある．しかし，その反面，外乱の周期が一定かつ既知の場合には，保守的な設計となる．そこで，つぎの章では，外乱の周期が一定かつ既知の場合を考え，周期外乱を抑制する制御系の保守性の低い設計を行うことを考える．

第6章　周期外乱抑制制御系設計の保守性低減法とその超音波モータの定速度制御への応用

第 5 章 では，任意周期の周期外乱を抑制するために，修正繰返し制御に基づく超音波モータの回転速度制御系を構成し，その効果を確認した．本章では，外乱の周期が制御系の設計時・実装時を通じて一定かつ既知である場合を考え，外乱の周期の情報を利用することにより，より保守性の低い周期外乱抑制制御系の設計を行うことを考える．

まず，修正繰返し制御系設計の保守性を低減させるために，ゲインスケジューリング手法を適用してむだ時間の LFT 形式の補償器を設計すると，周期外乱を抑制する性能が劣化する場合があることを例題を用いて指摘する．また，ゲインスケジューリング手法を適用する場合には，修正繰返し制御系設計問題の可解性が I 型サーボ系設計問題と等価になることを示す．これに対して本章では，むだ時間要素を含む重み関数を用いた周期外乱抑制制御系の設計手法を提案する．この手法により，ゲインスケジューリング手法を適用してむだ時間の LFT 形式の補償器を設計する場合でも，周期外乱の抑制性能を悪化させることなく設計の保守性が低減されることを例題を用いて示す．また，シミュレーションおよび超音波モータの回転速度制御実験を行い，提案手法の有効性を示す．

6.1　緒言

修正繰返し制御系を設計する手法として，これまでに，予め設計された制御系に修正繰返し補償器を付加する手法 [8] や，ループ整形設計手法を用いる方法 [32], 予め修正繰返し補償器を閉ループ系に含めた上で，μ 設計を行い補償器を設計する手法 [33] など，様々な手法が提案されている．

これらの手法では，修正繰返し補償器中のむだ時間要素を $\mathbf{BH}_\infty$ の要素ととらえて，むだ時間要素に対するスモールゲイン条件に基づく設計を行っているために，異なる周期の外乱に対応可能な制御系を得ることができる．すなわち，制御系実装時に修正繰返し補償器中のむだ時間を外乱の周期に一致させるようにすれば，その周期の外乱の抑制を行うことができる．しかしながら，外乱の周期が一定であり，異なる周期の外乱の抑制を行う必要がない場合には，このような設計は保守的な結果を与える．

むだ時間要素を $\mathbf{BH}_\infty$ の要素ととらえることの保守性を低減させるための一つの方法として，むだ時間要素を有限次元近似した上で，ゲインスケジューリング手法を適用して近似誤差の LFT 形式の補償器を設計する手法が提案されている [34]. しかしこれまでに，この手法を修正繰返し制御系設計に適用した場合の効果について，検討はなされていない．

そこで本章では，まず，実際に例題を用いて修正繰返し制御系を設計し，修正繰返し制御系設計の保

守性を低減させることの効果について検討する．その結果，周期外乱の抑制性能が悪化する場合があることを指摘する．つぎに，周期外乱の抑制性能を損なうことなく保守性の低い設計を行うことが可能な制御系設計手法を提案する．

本章の構成はつぎの通りである．まず 第 6.2 節 において，修正繰返し制御系設計の保守性を低減させると，周期外乱を抑制する能力が悪化する場合があることを，例題を用いて指摘する．つぎに，第 6.3 節 において修正繰返し制御系設計問題を設定した後，第 6.4 節 において，修正繰返し制御系設計の保守性を低減させた場合に周期外乱を抑制する能力が悪化する理由について考察する．最後に 第 6.5 節 において，周期外乱を抑制する能力を悪化することなく保守性の低い設計を行うことが可能となる制御系設計手法を提案する．

6.2　修正繰返し制御系設計における保守性低減の効果

本節では，修正繰返し制御系設計において，設計の保守性を低減させることの効果を検討する．ここでは例題として，実用上よく用いられるロバスト性能問題を考え，修正繰返し制御系設計において，保守性の低い設計を行うと周期外乱抑制性能が悪化する場合があることを指摘する．修正繰返し制御系設計問題の具体的な定義については第 6.3 節 において述べる．

6.2.1　ロバスト 性能問題

Fig. 6.1 の閉ループ系を考える．ここで，$\Sigma(s)$ は修正繰返し補償器と呼ばれる要素で，ローパスフィ

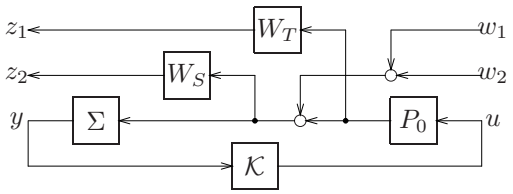


Fig. 6.1: Robust Performance Problem for Modified Repetitive Control System

ルタ $F(s)$ とむだ時間 L を用いてつぎのように与えられるとする．

$$\Sigma(s) = \frac{1}{1 - F(s)e^{-sL}}, \quad F(s) = \frac{\omega_F}{s + \omega_F}, \quad \omega_F = 2\pi \times 50, \quad L = 1/0.3 \tag{6.1}$$

また，ノミナルプラント $P_0(s)$, 感度関数に対する重み関数 $W_S(s)$，および相補感度関数に対する重み関数 $W_T(s)$ がそれぞれつぎのように与えられるとする[1].

$$P_0(s) = \frac{-0.0649s^2 + 1760s - 2430000}{s^3 + 1900s^2 + 4650000s + 5.40 \times 10^9} \tag{6.2}$$

[1]これらは 第 6.7 節 で超音波モータの制御に用いられる

$$W_T(s) = k_T\frac{s+\omega_T}{\omega_T}, \quad k_T = 0.2, \quad \omega_T = 2\pi\times 25 \tag{6.3}$$

$$W_S(s) = \frac{\omega_S}{s+\omega_S}, \quad \omega_S = 2\pi\times 1 \tag{6.4}$$

以上のもとで，Fig. 6.1 の閉ループ系がロバスト性能を達成するような補償器を設計することを考える．すなわち，z_1 から w_1 の間に任意の $\mathbf{BH}_\infty$ の要素を接続した閉ループ系に対して，その閉ループ系を内部安定化し，かつ，w_2 から z_2 までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが γ 未満となるような補償器 $\mathcal{K}$ を求めることを考える．ここで γ は予め与えられる正数で，外乱抑制性能を向上させるために，できる限り小さく選ばれるとする．

6.2.2 μ 設計に基づく修正繰返し制御系設計

むだ時間要素は無限次元システムであるため，これを厳密に取り扱った上で所望の設計仕様を満足する補償器を設計することは容易ではない．これに対して，むだ時間要素を $\mathbf{BH}_\infty$ の要素とみなし，プラントの摂動や仮想的摂動とあわせて構造的変動ととらえれば，μ 設計の枠組を用いて Fig. 6.1 の補償器を容易に設計することが可能である [33]. ここではさらに簡単のため，定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に帰着して補償器を設計することとする．すなわち，Fig. 6.2 の閉ループ系を内部安定化し，かつ，つぎの条件を満足する正数 d_0, d_1 と補償器 $\mathcal{K}$ を求める．

$$\|\operatorname{diag}(d_0^{\frac{1}{2}}, d_1^{\frac{1}{2}}, \gamma^{-1}) G_{cl} \operatorname{diag}(d_0^{-\frac{1}{2}}, d_1^{-\frac{1}{2}}, 1)\| < 1 \tag{6.5}$$

ただし G_{cl} は Fig. 6.2 の閉ループ伝達関数行列である．

定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を解き，2 分法により γ の最小値 (γ_{opt}) を求めた結果 $\gamma_{opt} = 0.76$ となった．閉ループ系の最悪感度特性を Fig. 6.3 の薄い実線に示す．ただし，z_1 から w_1 の間に接続する $\mathbf{BH}_\infty$ の要素として，単位円上の複素数を数点選んで感度関数のゲインを計算し，その中で最も大きなゲインをプロットしている．点線は，$\gamma_{opt} W_S^{-1}$ のゲイン特性を表している．また，繰返し周波数における感度を △ 印で示している．$L = 1/0.3$ の場合の繰返し周波数 $0.3, 0.6, 0.9, \cdots$ Hz において感度が下向きのピーク特性を有しており，周期が $L = 1/0.3$ 秒の周期外乱を重点的に抑制する制御系となっていることがわかる．

ここでの修正繰返し制御系設計では，むだ時間要素を $\mathbf{BH}_\infty$ の要素とみなしているため，設計問題はむだ時間 L に依存しない．よって，実装時に修正繰返し補償器内部のむだ時間を外乱の周期に一致するよう調整すれば，その周期の外乱を抑制することができる．運転状況により外乱の周期が変化した場合にも，補償器の設計をやり直す必要がないという利点がある [33, 8]. しかし，設計時に外乱の周期が既知で，かつその周期が運転状況により変化しない場合には，このような従来の設計は保守的な結果を与える．そこで，つぎの節では，従来の設計の保守性を低減させることを考え，その効果について検討する．

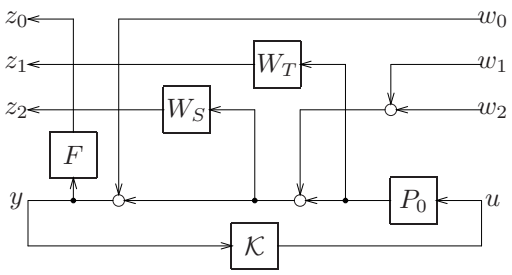


Fig. 6.2: μ Synthesis Ploblem

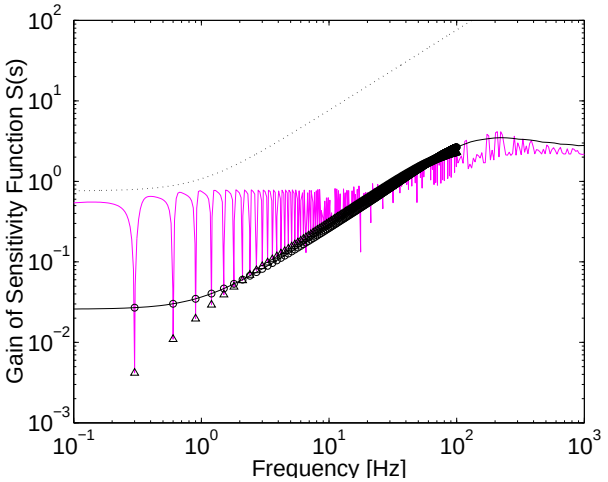


Fig. 6.3: Worst-case Sensitivity Gain

6.2.3　ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系設計

前節で述べたように，むだ時間要素を $\mathbf{BH}_\infty$ の要素ととらえて μ 設計を行い修正繰返し制御系を設計すれば，異なる周期の外乱に対応可能な制御系を得ることができる．すなわち，制御系実装時に修正繰返し補償器中のむだ時間を外乱の周期に合わせれば，その周期の外乱を抑制することができる．一方，現実の問題の中には，外乱の周期が不変かつ既知である場合もある．たとえばプリンタの場合には，感光体の回転速度に一定周期の速度変動が含まれるため，一周期分の速度変動を記憶するメモリを用意し，回転速度の制御に利用している [35]. このような場合には，外乱の周期に依存した制御系の設計を行うことにより，より保守性の低い制御系を構成することができ，制御性能が向上するものと期待できる．

むだ時間要素を持つ制御対象に対して保守性の低い設計を行うための一つの方法は，むだ時間要素を有限次元近似した上で，ゲインスケジューリング手法を適用して近似誤差の LFT 形式の補償器を設計することである [34]. この手法を用いて修正繰返し制御系の設計を行えば，外乱周期に依存した保守性の低い補償器を得ることができ，周期外乱の抑制性能も向上することが期待できる．

実際に，むだ時間要素に対するゲインスケジューリングを行って第 6.2.1 節 の修正繰返し制御系を設計[2]した結果，γ の最小値は 0.029 となった．この値が μ 設計の場合の 0.76 よりも小さいことから，保守性の低い設計となっていることが確認できる．一方，最悪感度特性を Fig. 6.3 の濃い実線に示す．また，繰返し周波数における感度を ○ 印で示す．従来の修正繰返し制御系設計の場合に得られていた繰返し周波数におけるピーク特性が消滅し，繰返し周波数における感度は悪化していることがわかる．

以上のように，修正繰返し制御系を設計する際に，ゲインスケジューリング手法を適用して保守性の低い設計を行うと，周期外乱を抑制する能力が悪化することがある．よって，むだ時間要素を有限次元近似した上で，ゲインスケジューリング手法を適用して近似誤差の LFT 形式の補償器を得るなど，さらに保守性の低い設計を行った場合にも，周期外乱の抑制性能が悪化しない保証はない．

[2]具体的な設計方法については 第 6.3.2 節 で述べる

以上のことから，外乱の周期が不変かつ既知である場合には，保守性の低い設計を行った場合にも周期外乱を抑制する能力が悪化しないような制御系設計手法を検討することが重要である．本章では，そのような手法を実際に提案するが，その前に，周期外乱の抑制性能が劣化する理由について考察する．そのために，つぎの節ではより一般的な状況を考えて，改めて修正繰返し制御系の設計問題を設定する．

なお本章では簡単のため，むだ時間要素を $\mathbf{BH}_\infty$ の要素ととらえ，むだ時間要素の有限次元近似は行わない．その上で，ゲインスケジューリング手法を適用してむだ時間要素の LFT 形式の補償器を設計することを考える．むだ時間要素を有限次元近似し，ゲインスケジューリング手法を適用して近似誤差の LFT 形式の補償器を設計する場合については，第 8 章 で扱う．

6.3 修正繰返し制御系設計問題とその解法

前節では，例としてロバスト性能を達成する修正繰返し制御系の設計問題を考え，保守性の低い設計を行うと，周期外乱の抑制性能が劣化する場合があることを指摘した．本節では，周期外乱の抑制性能が劣化する理由について考察するために，より一般的な状況を考えて修正繰返し制御系の設計問題を定式化する．

6.3.1 修正繰り返し制御系設計問題

現実の制御対象は不確かさを持つことが多い．よって，現実の制御対象に対して周期外乱を抑制する制御系を設計する場合には，μ 設計におけるロバスト性能問題で行われているように，制御対象の不確かさを考慮し，かつ，閉ループ系の最悪感度を抑えるような設計が実用上重要である．

そこで本節では，修正繰返し制御系を設計する際に，ロバスト性能を扱うことができるようなつぎの設計問題を考える．

問題 **6.1** (修正繰返し制御系設計問題) $G(s)$ は与えられた有限次元の一般化プラントであるとする．$\Sigma(s)$ はつぎのように与えられた修正繰返し補償器であるとする．

$$\Sigma(s) = (I - F(s)e^{-sL})^{-1} \tag{6.6}$$

ただし，ローパスフィルタ $F(s)$ は以下に定義する集合 $\mathbf{F}$ に属すとする．このとき，*Fig. 6.4* の閉ループ系を内部安定化し，かつ w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを 1 未満にするような補償器 $\mathcal{K}$ を求めよ．

定義 **6.1** 与えられたローパスフィルタ $F(s)$ の実現

$$F(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & D_F \end{array}\right] \tag{6.7}$$

に対して，(A_F, B_F, C_F) は可制御かつ可観測で，かつ，以下の条件を満足するとき，$F(s)$ は $\mathbf{F}$ に属すという．

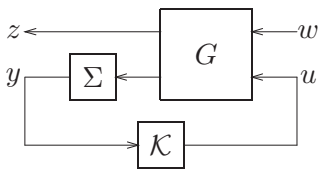


Fig. 6.4: Modified Repetitive Control System

- A_F は $\bar{\mathbf{C}}_+$ に固有値を持たない
- $\bar{\sigma}(D_F) < 1$
- 任意の 0 でない ω に対して $\bar{\sigma}(F(j\omega)) < 1$
- $F(0)F(0)^T = I$

むだ時間要素を $\mathbf{BH}_\infty$ の要素とみなし，むだ時間要素に対するスモールゲイン条件を用いて補償器の設計を行う場合には，むだ時間要素を取り外した系が内部安定となる必要がある．そのために，定義 6.1 の 1 番目の条件によりローパスフィルタが安定であることを要求している．2 番目の条件は，プラントが厳密にプロパな場合に閉ループ系を内部安定化するために必要である．3 および 4 番目の条件は，周期外乱抑制の制御性能に関連している．修正繰返し制御系では，外乱抑制を行いたい周波数帯域において，フィルタの最大特異値が 1 に近くなるようにフィルタを設定しておくと，$\Sigma(j\omega_i), \omega_i = 2\pi i/L (i = 0, 1, 2, \ldots)$ のゲインが大きくなり，この周波数帯域の周期外乱が小さく抑制されることが期待できる．特に 0 周波数では，4 番目の条件より，修正繰返し補償器 Σ は積分特性を持つため，ステップ状の外乱の定常的な除去を行うことができる．修正繰り返し制御を実システムに適用する場合には，1 次のローパスフィルタ

$$F(s) = \frac{\omega_F}{s + \omega_F}$$

が用いられることが多いが，これも上記 4 つの条件を満足する．なお，上記の周波数 ω_i のことを以下では繰返し周波数と呼ぶことにする．

6.3.2　ゲインスケジューリング手法の適用

$F(s)$ の状態空間実現を用いて $\Sigma(s)$ を

$$\Sigma(s) = e^{-sL} \star H(s) \tag{6.8}$$

$$H(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_F & B_F & B_F \\ \hline C_F & D_F & D_F \\ 0 & I & I \end{array}\right] \tag{6.9}$$

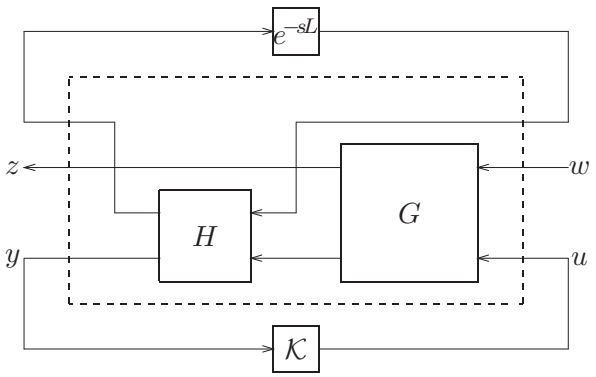


Fig. 6.5: Equivalent Closed-loop System

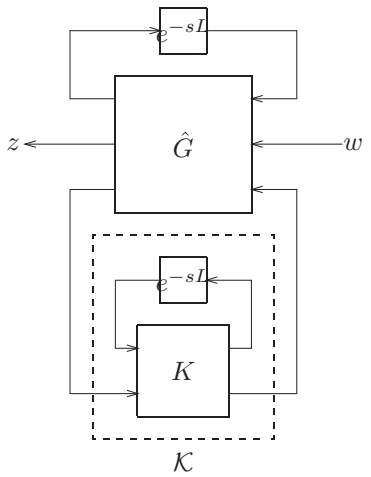


Fig. 6.6: Gain Scheduling

と表せば，Fig. 6.4 と等価な閉ループ系を Fig. 6.5 のように書くことができる．ここで，むだ時間要素を構造的摂動の一部ととらえれば，問題 6.1 の $\mathcal{K}$ の設計問題は，Fig. 6.5 の点線内部を一般化プラントとする μ 設計問題 [2] となる．よって，μ 設計問題を解くことにより，問題 6.1 に対する解 $\mathcal{K}$ を得ることができる．

これに対して本章では，より保守性の低い設計を行うために，ゲインスケジューリング手法を適用する．すなわち，$\mathcal{K}(s)$ を

$$\mathcal{K}(s) = e^{-sL} \star K(s) \tag{6.10}$$

と仮定した上で，Fig. 6.6 の閉ループ系を内部安定化し，かつ w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを 1 未満にする $K(s)$ を設計する問題を考える．この問題は，第 8 章 第 8.4.2 節 でも扱われており，そこでは，$K(s)$ の設計問題を定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に帰着させて解いている．本章でも，第 8.4.2 節 と同様の手順で $K(s)$ の設計を行う．すなわち，Fig. 6.5 の点線内部の伝達関数行列 $\hat{G}$ の状態空間実現を

$$\hat{G}(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} A_{ss} & A_{s\theta} & B_{1s} & B_{2s} \\ \hline A_{\theta s} & A_{\theta\theta} & B_{1\theta} & B_{2\theta} \\ C_{1s} & C_{1\theta} & D_{11} & D_{12} \\ C_{2s} & C_{2\theta} & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{cc|ccc} A & 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ B_F C_2 & A_F & B_F & B_F D_{21} & 0 \\ \hline D_F C_2 & C_F & D_F & D_F D_{21} & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & I & D_{21} & 0 \end{array}\right] \tag{6.11}$$

とおき，$G_{cl}(s)$ と $K(s)$ の閉ループ系を内部安定化し，かつ，つぎの定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ ノルム条件

$$\left\| \begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} G_{cl} \star K \begin{bmatrix} D^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \tag{6.12}$$

を満足するスケーリング行列 $D > 0$ と $K(s)$ を求める．ただし，G_{cl} を (8.23) 式 で与え，J_s と J_θ を空行列とする．すなわち，(8.21) 式 において $n_{s_0} = n_{\theta_0} = 0$ とおく．

6.4　主要な結果

第 6.2 節 で指摘したように，むだ時間要素のゲインスケジューリングを行い修正繰返し制御系を設計すると，感度関数のピーク特性が相殺され，周期外乱抑制性能が劣化することがある．この現象は，つぎの事実に起因すると考えられる．

事実 **6.1** $F \in \mathbf{F}$ のとき，*(6.6)* 式 で定義される $\Sigma(s)$ の右閉半平面の極は，原点のみである．

すなわち，問題 6.1 では，感度関数のゲインにピーク特性を持たせることを意図して閉ループ系に $\Sigma(s)$ を含めたにもかかわらず，実際には感度関数の直流ゲインが 0 になるという制約を課すことしかできない．

実際，以下の定理が示すように，ローパスフィルタ $F(s)$ が以下に定義する集合 $\mathbf{F}_-$ に属するとき，ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系設計問題と I 型サーボ系の設計問題の可解性は等価となる．

定義 **6.2** 与えられたローパスフィルタ $F(s)$ の実現 *(6.7)* 式 に対して，C_F が行フルランクで，かつ，つぎの式を満足する行列 $P > 0$ が存在するとき，$F(s)$ は集合 $\mathbf{F}_-$ に属すという．

$$A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T < 0 \tag{6.13}$$

$$(D_F - C_F A_F^{-1} B_F) B_F^T = C_F A_F^{-1} P A_F^T \tag{6.14}$$

定理 **6.1** 与えられた $F(s)$ が $\mathbf{F}_-$ に属すとする．このとき，つぎの *2* つは等価である．

(i) 第 *6.3.2* 節 の定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題が可解．

(ii) *Fig. 6.4* において $\Sigma(s)$ を I 型サーボの内部モデル

$$\Sigma(s) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array}\right] \tag{6.15}$$

でおきかえた閉ループ系を内部安定化し，かつ，w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを 1 未満とする補償器 $\mathcal{K}$ が存在する．

証明 付録 A.1 を参照．□

つぎの命題は，ローパスフィルタの集合 $\mathbf{F}$ と $\mathbf{F}_-$ を関連づけるものである．

命題 **6.1** $\mathbf{F}_- \subseteq \mathbf{F}$ が成立する．

証明 付録 A.2 を参照．□

すなわち，$F \in \mathbf{F}_-$ は $F \in \mathbf{F}$ が成立するための十分条件を与えている．一方，つぎの命題は，$F \in \mathbf{F}$ が成立するための必要条件を与える．

命題 6.2 $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F}_+$ が成立する．

ただし，$\mathbf{F}_+$ はつぎのように定義される集合である．

定義 6.3 与えられたローパスフィルタ $F(s)$ の実現 *(6.7)* 式 に対して，C_F が行フルランクで，かつ，つぎの式を満足する行列 $P > 0$ が存在するとき，$F(s)$ は集合 $\mathbf{F}_+$ に属すという．

$$A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T \leq 0 \tag{6.16}$$

$$(D_F - C_F A_F^{-1} B_F) B_F^T = C_F A_F^{-1} P A_F^T \tag{6.17}$$

証明 付録 A.3 参照．□

注意 6.1 $F(0) = I$ の場合には $D_F - C_F A_F^{-1} B_F = I$ が成り立つことから，*(6.14)* 式, *(6.17)* 式 は以下の条件となる．

$$B_F^T - C_F A_F^{-1} P A_F^T = 0 \tag{6.18}$$

命題 6.1, 命題 6.2 より，$\mathbf{F}_- \subseteq \mathbf{F} \subseteq \mathbf{F}_+$ の関係がある．また，$F \in \mathbf{F}_-$ および $F \in \mathbf{F}_+$ の条件は，F の実現に対する等式制約付きの LMI 条件となる．一方，$F \in F$ の条件が LMI 条件に帰着されるかどうかについてはまだ明らかになっていない．しかし，$F \in \mathbf{F}_-$ と $F \in \mathbf{F}_+$ の条件の違いは，(6.13) 式 の負定制約条件と (6.16) 式 の半負定制約条件の違いだけであり，上記 3 つの集合に実用上の違いはほとんどないと考えられる．さらに，以下に示すように，実用上用いられる多くのフィルタが $\mathbf{F}_-$ に属す．

1 次系の場合　$F(s)$ が以下の伝達関数で与えられた場合を考える．

$$F(s) = \frac{ds + a}{s + a} = \left[\begin{array}{c|c} -a & 1 \\ \hline (1-d)a & d \end{array}\right] \tag{6.19}$$

ただし，$a > 0, 0 \leq d < 1$ である．このとき P を

$$P = \frac{1}{(1-d)a} > 0 \tag{6.20}$$

と定めると (6.14) 式 が成立し，さらに，

$$AP + PA^T + BB^T = -\frac{1+d}{1-d} < 0 \tag{6.21}$$

となるので (6.13) 式 が成立する．

よって，例えば，

$$\frac{1}{s+1}, \quad \frac{0.5s+1}{s+1}$$

などのフィルタが $\mathbf{F}_-$ に属す．

2 次振動系の場合　ここでは $F(s)$ が以下の 2 次振動系

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n & 1 \\ \hline \omega_n^2 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{6.22}$$

で与えられた場合を考え，$F \in \mathbf{F}_-$ となるための必要十分条件，すなわち，(6.13) 式, (6.14) 式 が成立するための必要十分条件を求める．ただし，$\omega_n > 0, \zeta \geq 0$ である．

つぎの補題が成立する．

補題 6.1 F が *(6.22)* 式 で与えられたとし，$\omega_n > 0, \zeta \geq 0$ を仮定する．このとき，*(6.13)* 式, *(6.14)* 式 を満足する $P > 0$ が存在するための必要十分条件は，

$$\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.23}$$

が成立することである．

証明 まず P を

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

とすると，

$$\begin{aligned} CA^{-1}PA^T &= \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2\zeta}{\omega_n} & -\frac{1}{\omega_n^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -(p - 2 + 2\zeta\omega_n p_3) & \omega_n^2(p_3 + 2\zeta\omega_n p_1) + 2\zeta\omega_n(p_2 + 2\zeta\omega_n p_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり，これが B^T と等しくなくてはならないので，p_2, p_3 は

$$\begin{aligned} p_2 + 2\zeta\omega_n p_3 &= 0 \\ \omega_n^2(p_3 + 2\zeta\omega_n p_1) &= 1 \end{aligned}$$

を満たすものでなければならない．すなわち，

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{\omega_n^2} - 2\zeta\omega_n p_1 \\ p_2 &= -2\zeta\omega_n p_3 = -2\zeta\omega_n \left(\frac{1}{\omega_n^2} - 2\zeta\omega_n p_1\right) \end{aligned}$$

である．このとき，

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & -2\zeta\omega_n p_3 \end{bmatrix}$$

であるので，$P > 0$ となるための必要十分条件は，

$$-2\zeta\omega_n p_3 > 0, \quad p_1 + \frac{p_3}{2\zeta\omega_n} > 0$$

であるが，

$$p_1 + \frac{p_3}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2\zeta\omega_n}(2\zeta\omega_n p_1 + p_3) = \frac{1}{2\zeta\omega_n^3} > 0$$

が成り立つので，$P > 0$ は $p_3 < 0$, すなわち

$$p_1 > \frac{1}{2\zeta\omega_n^3} \tag{6.25}$$

と等価である．よって，以降では，(6.25) 式 を仮定する．

この P に対して，簡単な計算から以下の関係が成り立つことを確かめることができる．

$$AP + PA^T + BB^T = \begin{bmatrix} 2p_3 & -4\zeta\omega_n p_3 - \omega_n^2 p_1 \\ -4\zeta\omega_n p_3 - \omega_n^2 p_1 & (8\zeta^2 - 2)\omega_n^2 p_3 + 1 \end{bmatrix}$$

今，(6.25) 式，つまり $p_3 < 0$ を仮定しているので，(6.13) 式 が成立するための必要十分条件は，

$$\det(AP + PA^T + BB^T) > 0 \tag{6.26}$$

である．また，

$$\det(AP + PA^T + BB^T) = -\omega_n^4 p_1^2 + 4\zeta\omega_n p_1 - \frac{2}{\omega_n^2}$$

であるので，(6.26) 式 を満足する p_1 が存在するためには，

$$4\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^4\frac{2}{\omega_n^2} = \omega_n^2(4\zeta^2 - 2) > 0$$

つまり，

$$\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

でなければならない．このとき，

$$p_1 = \frac{2\zeta}{\omega_n^3}$$

とすると，(6.25) 式, (6.26) 式 が成り立つ．よって，(6.22) 式 の $F(s)$ に対して，(6.13) 式, (6.14) 式 を満足する $P > 0$ が存在するための必要十分条件は，$\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ である．□

この補題から，$\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ が $F \in \mathbf{F}_-$ となるための必要十分条件である．一方，$\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ は，任意の 0 でない ω に対して $|F(j\omega)| < 1$ となるための必要十分条件, すなわち，$F \in \mathbf{F}$ となるための必要十分条件である．よって，$F(s)$ が (6.22) 式 で与えられる場合には，ほとんどすべての $F(s) \in \mathbf{F}$ が $\mathbf{F}_-$ に属す．

以上より，例えば，

$$\frac{10^2}{s^2 + 15s + 10^2}$$

などの場合が $\mathbf{F}_-$ に属す．

注意 **6.2** $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合には *(6.13)* 式, *(6.14)* 式 を満足する $P > 0$ は存在せず，ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系設計問題と I 型サーボ系設計問題の可解性が等価であるとは限らない．しかし，つぎに示すように，実際にゲインスケジューリング手法を適用して修正繰返し制御系を設計すると，第 *6.2* 節 で示した例と同様に，繰返し周波数におけるピーク特性は相殺される．

$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \omega_n = 2\pi \times 50$ とおき，*(6.22)* 式 の $F(s)$ を用いて第 *6.2* 節 の例題を解いた．その結果，$\gamma_{opt} = 0.29$ となった．このときの閉ループ系の最悪感度特性を *Fig. 6.7*の実線に示す．点線は $\gamma_{opt}/W_S(s)$ のゲイン，丸印は繰返し周波数における最悪感度である．このように，$F \notin \mathbf{F}_-$ の場合でも，むだ時間要素のゲインスケジューリングを行い修正繰返し制御系を設計すると，繰返し周波数におけるピーク特性が相殺されることがある．

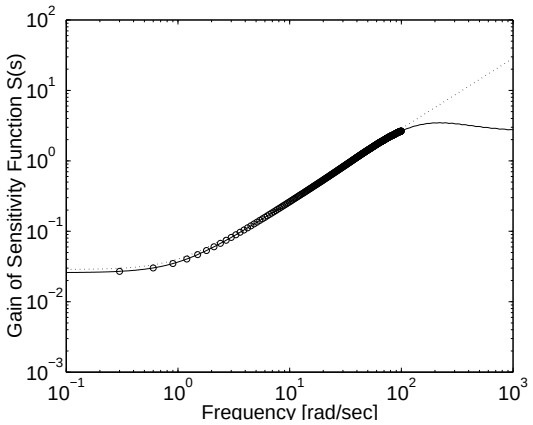


Fig. 6.7: Worst-case Sensitivity Gain

直列結合した場合

補題 **6.2** 与えられた *2* つのフィルタ F_1, F_2 が $\mathbf{F}_-$ に属すと仮定する．このとき，*2* つのフィルタの直列結合 F_1F_2 もまた $\mathbf{F}_-$ に属す．

証明 $i = 1, 2$ に対して，つぎの伝達関数を考える．

$$F_i(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array}\right]$$

仮定より，$F_i(0) = I$ であり，各 i について (6.13) 式, (6.14) 式 を満足する $P_i > 0$ が存在する．

$$F(s) = F_1(s)F_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

とすると，A, B, C, D をつぎのように与えることができる．

$$\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} A_1 & B_1C_2 & B_1D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hdashline C_1 & D_1C_2 & D_1D_2 \end{array}\right]$$

ここで，$F_1(0) = I$ より，

$$CA^{-1} = \left[\begin{array}{cc} C_1 & D_1C_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} A_1^{-1} & -A_1^{-1}B_1C_2A_2^{-1} \\ 0 & A_2^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} C_1A_1^{-1} & C_2A_2^{-1} \end{array}\right]$$

がなりたち，また，$F_2(0) = I$ より，

$$B^TA^{-T} = \left[\begin{array}{cc} D_2^TB_1^T & B_2^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} A_1^{-T} & 0 \\ -A_2^{-T}C_2^TB_1^TA_1^{-T} & A_2^{-T} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} B_1^TA_1^{-T} & B_2^TA_2^{-T} \end{array}\right]$$

が成り立つ．よって，

$$P = \left[\begin{array}{cc} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{array}\right]$$

とすると，$i = 1, 2$ に対して (6.14) 式 が成り立つことより，

$$CA^{-1}P = \left[\begin{array}{cc} C_1A_1^{-1}P_1 & C_2A_2^{-1}P_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} B_1^TA_1^{-T} & B_2^TA_2^{-T} \end{array}\right] = B^TA^{-T}$$

が成り立つので，$F(s)$ に対しても (6.14) 式 が成立する．

一方，

$$N = \left[\begin{array}{cc} I & -B_1C_2A_2^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right]$$

とすると，

$$\begin{aligned} NAPN^T &= \left[\begin{array}{cc} I & -B_1C_2A_2^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} I & -B_1C_2A_2^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right]^T \\ &= \left[\begin{array}{cc} A_1P_1 & 0 \\ 0 & A_2P_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -A_2^{-T}C_2^TB_1^T & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A_1P_1 & 0 \\ -A_2P_2A_2^{-T}C_2^TB_1^T & A_2P_2 \end{array}\right] \\ NB &= \left[\begin{array}{cc} I & -B_1C_2A_2^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_1D_2 \\ B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array}\right] \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$N(AP + PA^T + BB^T)N^T = \left[\begin{array}{cc} A_1P_1 + P_1A_1^T + B_1B_1^T & -B_1(C_2A_2^{-1}P_2A_2^T - B_2^T) \\ -(A_2P_2A_2^{-T}C_2^T - B_2)B_1^T & A_2P_2 + P_2A_2^T + B_2B_2^T \end{array}\right]$$

となる．さらに，$i = 1, 2$ に対して (6.14) 式 が成り立つことから，

$$N(AP + PA^T + BB^T)N^T = \begin{bmatrix} A_1P_1 + P_1A_1^T + B_1B_1^T & 0 \\ 0 & A_2P_2 + P_2A_2^T + B_2B_2^T \end{bmatrix}$$

となるので，$i = 1, 2$ に対する (6.13) 式 の条件から

$$N(AP + PA^T + BB^T)N^T < 0$$

が成り立つ．ここで，N は正則行列であるので，

$$AP + PA^T + BB^T < 0$$

が成り立つ．□

この結果と，1 次系, 2 次振動系の結果より，修正繰返し制御系設計においてフィルタとして用いられる多くのフィルタが $\mathbf{F}_-$ に属すことがわかる．例えば，

$$\frac{10(0.5s + 1)}{(s + 10)(s + 1)}, \quad \frac{10^2(0.5s + 1)}{(s^2 + 15s + 10^2)(s + 1)}$$

などのフィルタが $\mathbf{F}_-$ に属す．

以上のように，実用上用いられる多くのフィルタが $\mathbf{F}_-$ に属し，ゲインスケジューリングに基づく修正繰返し制御系設計問題と I 型サーボ問題の可解性は等価となる．このことから，多くの場合において，修正繰返し制御系設計の保守性を低減させたときに周期外乱の抑制性能が悪化しない保証はない．そこで，つぎの節では，周期外乱の抑制性能を損なうことなく設計の保守性を低減可能な手法を検討する．

6.5　むだ時間を含む重み関数に基づく設計

前節までの結果から，修正繰返し制御系設計に対して保守性の低い設計を行うと，

- 修正繰返し補償器 $\Sigma(s)$ を閉ループ系に含めても感度関数の直流ゲインが 0 になるという制約を課すことしかできない

ために，繰返し周波数における感度関数のゲインが小さくなる保証がなく，また，

- 感度関数に対する重み関数がピーク特性を持たない

ために，保守性の低い設計を行うと，感度特性が重みで整形され，ピーク特性が相殺されると考えられる．そこで，保守性の低い設計を行った場合でも周期外乱の抑制性能を損なわないようにするために，本節では，閉ループ系に $\Sigma(s)$ を含めずに，感度関数に対する重み関数に $\Sigma(s)$ を含めることを考える．ただし，$\Sigma(s)$ は原点極を持つため，そのまま重みとして使用すると，閉ループ系を内部安定化することができない．よってここでは，フィルタの最大特異値を 1 未満に選ぶことにする[3]．

[3]文献 [36] では，$\Sigma(s)$ が原点極を持つ場合について議論している

以下では，$\Sigma(s)$ を重みに含めて制御系設計を行う場合には，ゲインスケジューリング手法を適用する場合でも，周期外乱の抑制性能を損なうことなく設計の保守性を低減させることができることを例題を用いて示す．

6.5.1 ロバスト性能問題

Fig. 6.8 の閉ループ系を考える．ここで，$\Sigma(s), P_0(s), W_T(s), W_S(s)$ は 第 6.2.1 節 と同様に与えられるとする．ただし，$\Sigma(s)$ が原点極を持たないようにするために，(6.1) 式 の $F(s)$ をつぎのように変更する．

$$F(s) = \alpha \frac{\omega_F}{s + \omega_F}, \quad \omega_F = 2\pi \times 50, \quad \alpha = 0.99$$

以上のもとで，Fig. 6.8 の閉ループ系がロバスト性能を達成するような補償器を設計することを考える．

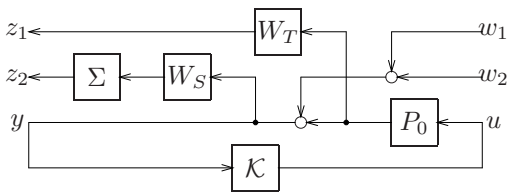


Fig. 6.8: Robust Performance Problem with Delay Involved Weight Function

すなわち，z_1 から w_1 の間に任意の $\mathbf{BH}_\infty$ の要素を接続した閉ループ系に対して，その閉ループ系を内部安定化し，かつ，w_2 から z_2 までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが γ 未満となるような補償器 $\mathcal{K}$ を求めることを考える．

以上のもとで，第 6.3.2 節 と同様にゲインスケジューリング手法を適用して補償器設計を行った結果，$\gamma_{opt} = 0.11$ となった．閉ループ系の最悪感度特性を Fig. 6.9 の濃い実線に示す．丸印は繰返し周波数における感度を示している．また，濃い点線は，$\gamma_{opt}/(\Sigma(s)W_S(s))$ のゲインを示している．繰返し周波数におけるピーク特性を含めて，感度関数は重み関数で整形されていることがわかる．一方，ゲインスケジューリング手法を適用せずに，μ 設計により有限次元の補償器を設計する場合には $\gamma_{opt} = 9.0$ となった．このときの最悪感度特性を Fig. 6.9 の薄い実線に示す．薄い点線は，$\gamma_{opt}/(\Sigma(s)W_S(s))$ のゲインを示している．ゲインスケジューリング手法を適用しない場合には，重み関数を取り除いた閉ループ系がむだ時間要素を含まないため，感度特性は繰返し周波数におけるピーク特性を持つことができない．γ_{opt} は比較的大きな値になっており，設計の保守性が高いことが確認できる．

6.6 従来手法と提案手法の比較

本節では 第 6.2 節, 第 6.5 節 の制御系の周期外乱抑制性能を比較し，第 6.5 節 の提案手法の有効性を検討する．

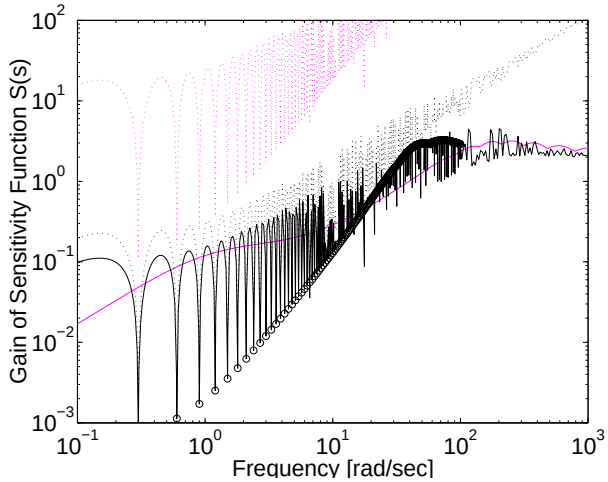


Fig. 6.9: Worst-case Sensitivity Gain (Proposed method)

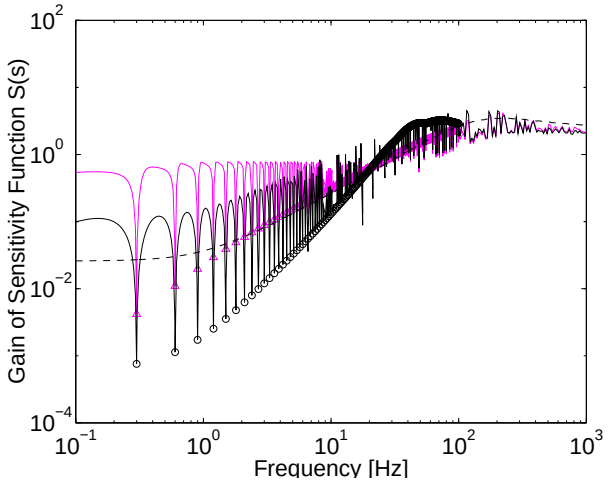


Fig. 6.10: Worst-case Sensitivity Gain (Comparison with proposed and current methods)

6.6.1　感度特性の比較

Fig. 6.10 に 3 つの制御系の最悪感度特性を示す．薄い実線と濃い破線はそれぞれ，μ 設計およびゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系の最悪感度特性を示している．これらは，Fig. 6.3 と共通である．また，濃い実線は提案手法を用いて設計した制御系の最悪感度特性で，Fig. 6.9 の濃い実線と共通である．10 Hz 以下の繰返し周波数においては，提案手法による制御系の感度が最も小さくなっている．10Hz 以下の繰返し周波数間の周波数帯域における感度を比較すると，ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系の感度が最も小さく，μ 設計に基づく修正繰返し制御系の感度が最も大きい．提案手法の感度は，これらの中間になっており，非周期的な外乱に対しても，ある程度の抑制効果が期待できる．

6.6.2　シミュレーション

シミュレーションを行い，3 つの制御系を比較する．ただし本節ではノミナル性能を考える．

外乱として Fig. 6.11 に示す三角波を与えたときの観測出力 y を Fig. 6.12 に示す．点線は μ 設計に基づく修正繰返し制御系，薄い実線はゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系, 濃い実線は提案手法である．$0 \sim 3.3$ 秒の過渡応答を比較すると，μ 設計に基づく修正繰返し制御系の外乱抑制性能が最も悪く，ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系の外乱抑制性能が最も良い．提案手法はこれらの中間になっている．$50 \sim 60$ 秒の応答を抜き出したグラフを Fig. 6.13 に示す．提案手法の制御系の外乱抑制性能が他の 2 つの制御系に比べて良いことがわかる．

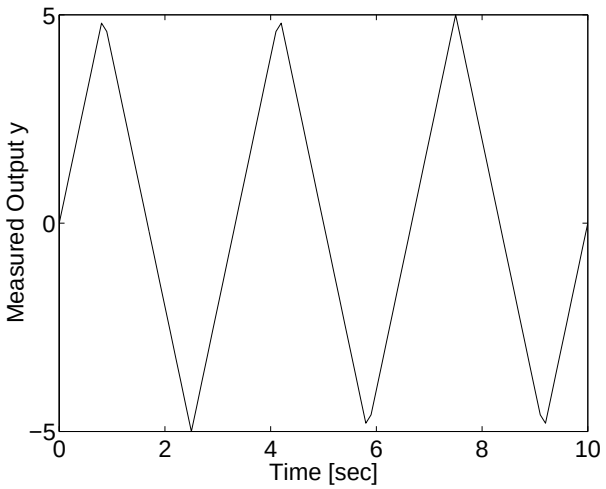


Fig. 6.11: Time Response of Disturbance

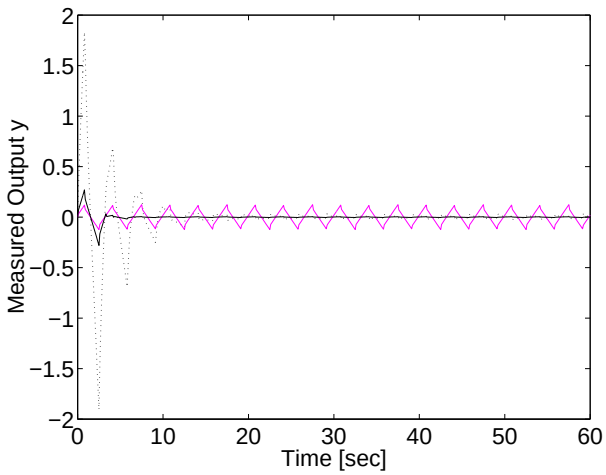


Fig. 6.12: Time Response of Measured Output y

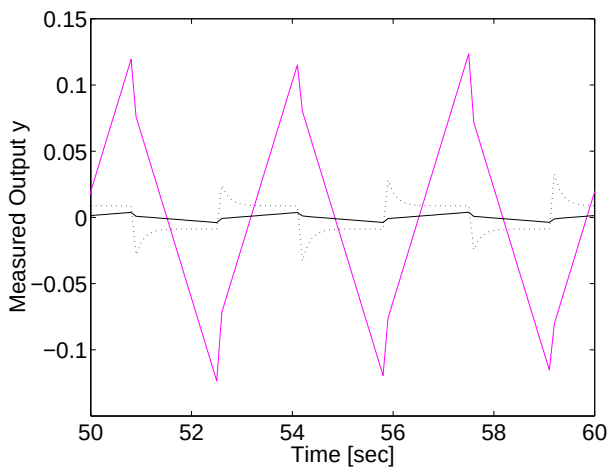


Fig. 6.13: Time Response of Measured Output y

6.7　超音波モータの定速度制御への応用

前節までに，周期外乱を抑制する制御系に対して保守性の低い設計を行うために，むだ時間要素を含む重み関数に基づく制御系設計手法を提案し，シミュレーションを行い提案手法の有効性を検証した．本節では，提案手法を用いて超音波モータの回転速度制御系を構成し，提案手法の有効性を検討する．

6.7.1　モデリング

実験に使用する超音波モータは，第 4 章 で用いた超音波モータと同一である．ただし，目標速度は 0.3 rps 一定であるとし，平均速度が 0.3 rps 付近で閉ループ同定実験を行った結果のみ考慮してプラントモデルを決定する．Fig. 6.14 は，第 4 章 で閉ループ同定実験を行って得られた周波数応答から，平均速度が 0.3 rps の場合を抜きだしたものである．この実験データに対して，第 4 章 と同様に，乗法的摂動を持つプラントを仮定し，プラントモデルを決定した．Fig. 6.15 に $W_T(s)$ のゲイン特性とモデル化誤差を示す．決定した $W_T(s), P_0(s)$ は，本章 (6.2) 式, (6.3) 式 に記載されている．

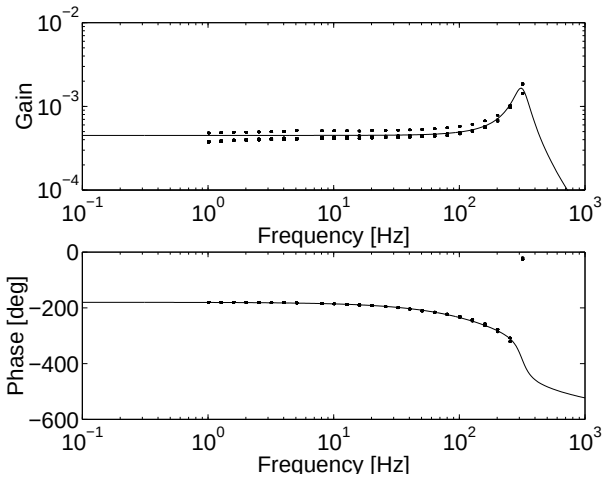


Fig. 6.14: Frequency Response of Plant (dot : measured, line : nominal Plant Model)

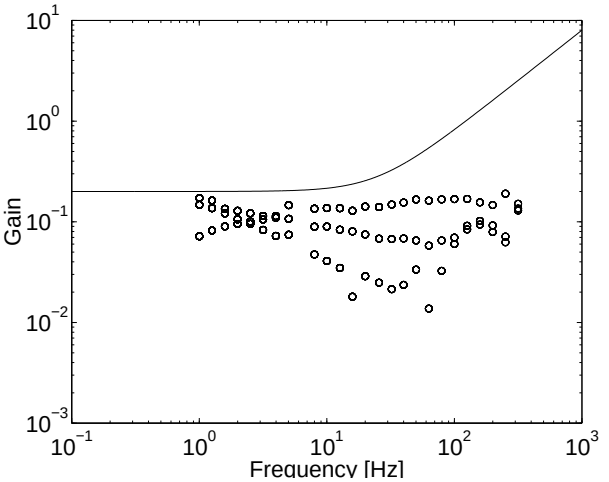


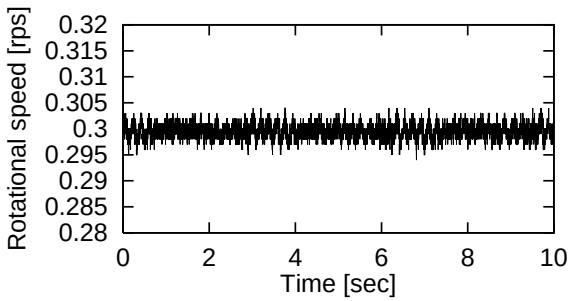
Fig. 6.15: Model Uncertainty (dots) and Weighting Function (line)

6.7.2　実験結果

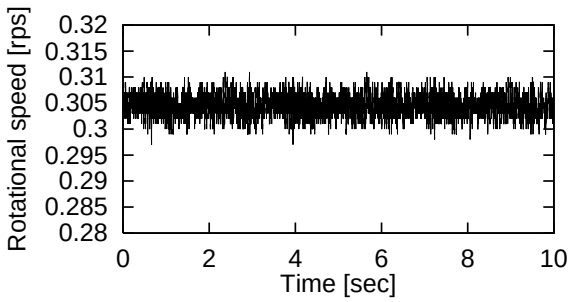
前節までに設計した 3 つの制御系: (a)μ 設計に基づく修正繰返し制御系，(b) ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系，(c) 提案手法による制御系を用いて定速度制御実験を行った．ただし，目標速度は 0.3 rps，無負荷状態で，サンプリング時間は 1msec とした．制御実験の長さは 110 秒で，最後の 20 秒間の回転速度, 加振周波数を記録した．

3 つの制御系の時間応答を Fig. 6.16 に示す．いずれの結果においても，回転速度測定の分解能の粗さが目立っているが，これは，制御実験時，回転速度を小数点以下 3 桁までしか記録しなかったのが原因

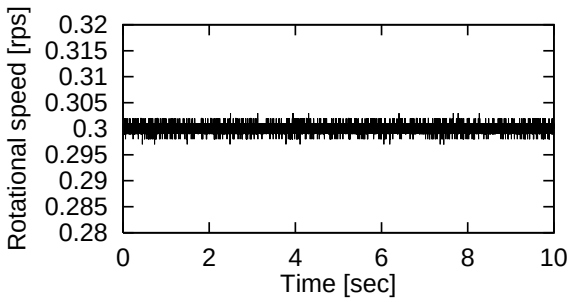
である．提案手法の制御性能を厳密に評価するためには，回転速度を記録する精度を上げて再実験を行うことが望ましいが，提案手法と従来手法の比較を行うためにはこの結果で十分であると考えられるので，以下ではこの結果を用いて考察する．なお，瞬間回転速度が 0.3 rps のときの本実験装置の回転速度測定の分解能は 2×10^{-5} [rps] であり，十分な分解能を有している (第 4 章 注意 4.1 参照).



(a) modified repetitve control (μ synthesis)

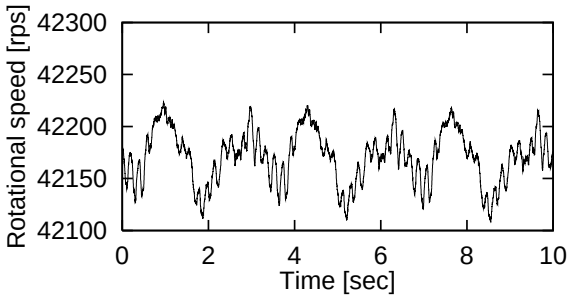


(b) modified repetitive control (gain scheduling)

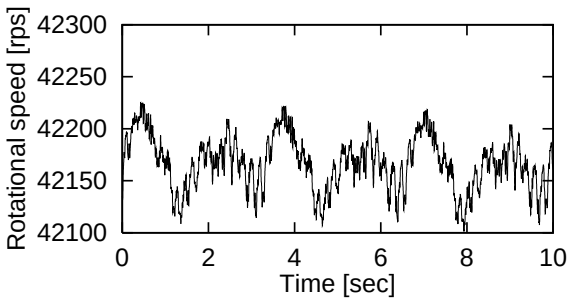


(c) proposed method

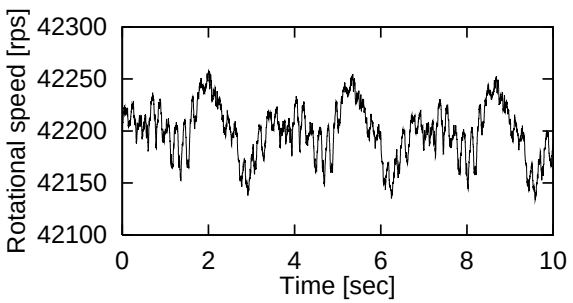
Fig. 6.16: Time Response of Rotational Speed for Constant Reference Speed (without load)



(a) modified repetitive control (μ synthesis)



(b) modified repetitve control (gain scheduling)



(c) proposed method

Fig. 6.17: Time Response of Control Input(wighout load)

回転速度変動 (:= 最高回転速度 - 最低回転速度) は，(a)μ 設計に基づく修正繰返し制御系の場合に 0.010 rps, (b) ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系の場合に 0.014 rps (c) 提案手法に基づく制御系の場合に 0.006 rps となっており，提案手法の速度変動が最も小さい．また，(a),(b) よ

り，ゲインスケジューリング手法を適用する場合は μ 設計を行う場合に比べて制御性能が劣化しており，第 6.6.2 節 の結果と整合性のとれた結果となっている．

つぎに定常偏差 (:= ロータ一周期分の平均速度 - 目標速度) を見ると，(a)μ 設計に基づく修正繰返し制御系の場合に 0.000 rps, (b) ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系の場合に 0.004 rps (c) 提案手法に基づく制御系の場合に 0.000 rps となっており，(b) ゲインスケジューリングに基づく修正繰返し制御系では，補償器が積分特性を持っているにもかかわらず，比較的大きな定常偏差が残っている．一方，(c) 提案手法の制御系では，補償器が積分特性をもっていないが，定常偏差はほぼ 0 となっている．この原因を調べるために，制御系の制御入力を Fig. 6.17 に示す．制御入力波形には約 3.3 秒の周期的な成分が顕著に見られるが，その一方で，時間の経過と共にしだいに低下していることがわかる．これは，温度上昇にともないステータの共振周波数がしだいに低下するため，加振周波数をゆっくり低下させて回転速度を一定に保つよう補償した結果であると考えることができる．すなわち，この時点では速度外乱には，時間とともに低下していくランプ関数状の成分が含まれていると考えられる．

そこで，このことを明らかにするために，速度外乱として傾き 1 のランプ関数を与えてシミュレーションを行い，3 つの制御系の外乱抑制性能を比較する．Fig. 6.18 にシミュレーション結果を示す．点線が μ 設計に基づく修正繰返し制御系，薄い実線がゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系，実線が提案手法による制御系である．μ 設計に基づく修正繰返し制御系は積分特性を持つため，出力が一定値に収束している．ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系も積分特性が含まれるが，60 秒までのシミュレーション結果では，出力が一定値に落ち着く様子は見られなかった．これに対して，提案手法による制御系は，積分特性を持たず，時間の経過とともに出力が上昇しているが，その変化率は小さく抑えられている．

Fig. 6.19 に 3 つの補償器のゲイン特性を示す．低周波数域に注目すると，2 つの修正繰返し制御系の場合には，補償器が積分特性を持つことから，周波数が低くなるにつれて，補償器のゲインは大きくなっている．一方，提案手法による補償器は，積分特性を持たないため，低周波数域でゲインは一定になっている．しかし，$10^{-3} \sim 10^{-2}$ 付近のゲインが他の補償器に比べて大きくなっており，その結果，ランプ関数を入力した場合の過渡応答が優れていたと考えられる．

つぎに，Fig. 6.16 の時間応答波形を FFT 解析した結果を Fig. 6.20 に示す．(c) 提案手法による制御系では，全体的に振幅が小さく抑えられており，最もよい外乱抑制性能を示している．一方，(a), (b) を比較してみると，回転同期の成分のうち低周波域 (1 ~ 4 倍成分) の振幅は，(a) μ 設計に基づく修正繰返し制御系の方が (b) ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系よりも小さくなっており，Fig. 6.10 の感度特性と同様の傾向を示している．

6.8　結言

修正繰返し制御系を設計する際に，設計の保守性を低減させるためにゲインスケジューリング手法を適用してむだ時間要素の LFT の構造を持つ補償器を設計すると，周期外乱を抑制する能力が劣化する場

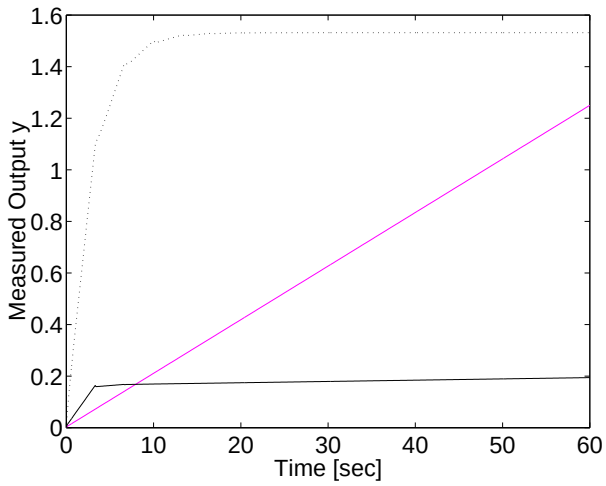


Fig. 6.18: Time Response of Measured Output y for Ramp Disturbance

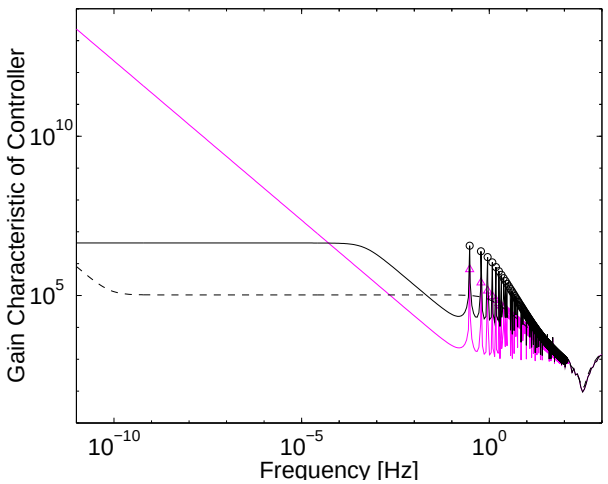
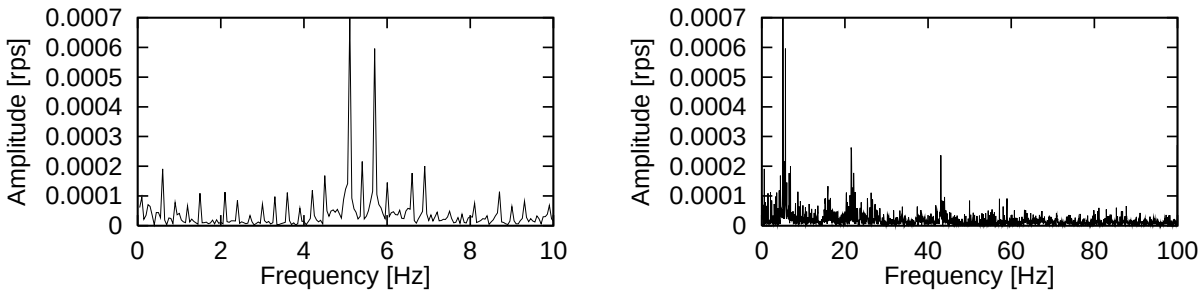


Fig. 6.19: Gain Characteristic of Controller

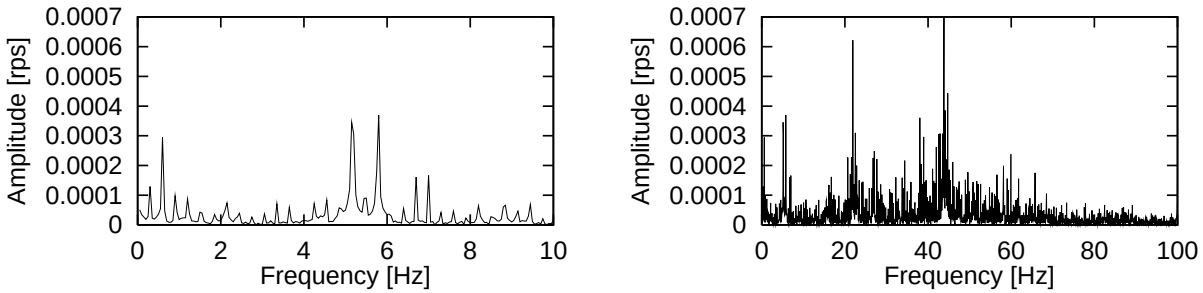
合があることを指摘した．また，実用上用いられる多くのローパスフィルタに対して，ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系設計問題は，I 型サーボ系の設計問題と可解性が等価であることを示した．

すなわち，修正繰り返し制御系設計の枠組みでは，周期外乱抑制能力は制御系設計の保守性に依拠しており，周期外乱抑制能力を維持したまま設計の保守性を低減することは困難である．よって，むだ時間を有限次元近似して設計を行ったり，無限次元系の問題として厳密な解を導出することができたとしても，周期外乱抑制の意味で望ましい補償器が得られるとは限らない．また，文献 [37] では，修正繰返し制御系の安定化補償器のパラメトリゼーションが与えられているが，本章の結果と照らし合わせると，パラメトライズされた補償器の集合は，周期外乱抑制に関して何も保証しない．

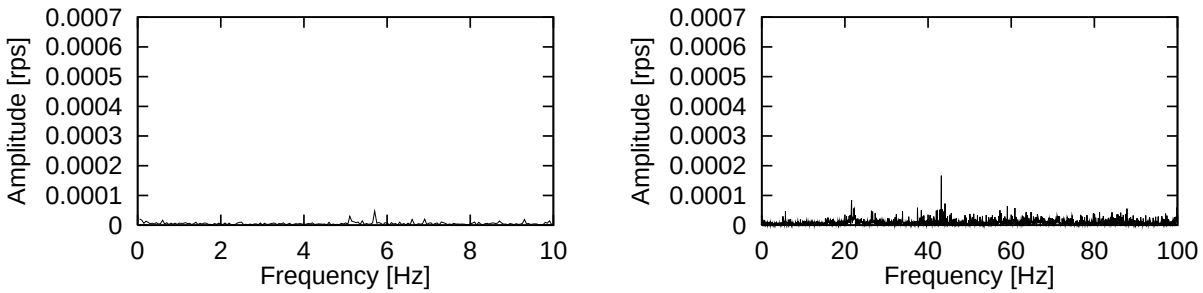
これに対して本章では，むだ時間を含む重み関数を用いて周期外乱を抑制する制御系の設計手法を提案した．提案手法を用いれば，ゲインスケジューリング手法を適用して，周期外乱の抑制性能を悪化させることなく設計の保守性を低減させることができる．実際に，シミュレーションおよび超音波モータの定速度制御実験を行い，提案手法の有効性を示した．提案手法を用いる場合には，むだ時間要素を有限次元近似し，補償器の構造を近似誤差の LFT 形式におくことにより，さらに保守性の低い設計を行うことができると考えられる．



(a) modified repetitive control (μ synthesis)



(b) modified repetitve control (gain scheduling)



(c) proposed method

Fig. 6.20: FFT Analysis of Rotational Speed in Fig. 4.10

第7章　一般化プラントの状態を生成するシステムを陽に持つ補償器の設計

前章までは，制御対象のモデルと，制御系の設計仕様の観点から，より現実的な場合を考慮しかつ保守性の低い設計を行うために，ゲインスケジューリング手法に基づいて LPV や LFT の構造を持つ補償器を設計するための方法を検討してきた．

本章以降では，実装を考慮したより一般的な補償器設計手法を提案する．まず，本章では，実装時の計算量を低く押えるために，補償器の構造に注目した設計手法を検討する．本章では実装時の計算量を低く抑えることに主眼をおくが，結果的に補償器設計時の計算量も低く抑えられる: 具体的には，多目的制御系設計問題において一般化プラントの状態の一部をある安定なシステムを用いて生成できる場合に，そのシステムを陽に持つ補償器の設計法を提案する．そのためにまず，与えられた問題を，一部の状態が観測できるとした等価な問題に帰着できることを示し，さらにその等価な問題に対する解と安定なシステムを用いてもとの問題の補償器が得られることを示す．提案手法における補償器の構造を用いることにより，補償器設計時・実装時の計算量を低減させることができる．また本章では，離散時間入力むだ時間系の場合にシミュレーションを行い，実際に制御則の計算時間が短縮されることを確認する．

7.1　緒言

より現実的な設計仕様を考慮した制御系の設計を行うために，$\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{H}_2$ ノルム制約や，領域極配置条件などの複数の設計仕様を同時に満足する多目的制御系の設計法が提案されている [10, 38]. しかし，多くの設計仕様を同時に考慮する結果, 補償器の次数が高くなる，補償器の設計に多大な計算量を要する，制御則の演算時間が長くなるという問題が生じる．

この問題を解決するために，文献 [1] では，一般化プラントの状態の一部が観測出力に含まれている場合に，その次数分低次の補償器を得る手法を与えている．この手法を利用して補償器の設計を行うことにより，補償器の設計に要する計算量を低減させることができ，また，制御則の演算時間を短縮できるという利点がある．

これに対して本章では，一般化プラントの状態の一部を制御入力と観測出力から生成できるようなシステムが存在する場合に，このようなシステムを陽に持つ補償器を得るための手法を与える．提案する手法を用いて補償器の設計を行うことにより，補償器の設計に必要な計算量を低減させることができ，また，制御則の計算時間を短縮することができる．

本章の構成はつぎの通りである．まず 第 7.2 節で，LMI に基づく多目的制御系の設計問題を設定す

る．この問題に対して 第 7.3 節で，一般化プラントの状態の一部を制御入力と観測出力から生成できるようなシステムが存在する場合に，このようなシステムを陽に持つ補償器の設計手法を提案する．第 7.4 節 では，混合感度問題に対して従来の設計法を適用する場合でも同様の構造の補償器が得られることを指摘し，提案手法との関連について述べる．第 7.5 節, 第 7.6 節 ではそれぞれ，提案手法を用いる場合の設計時および実装時の利点を示す．

7.2　問題設定

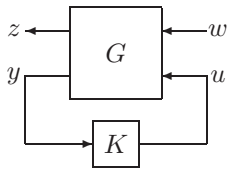


Fig. 7.1: Closed-loop System

本章では，与えられた一般化プラント G に対して, Fig. 7.1 の閉ループ系が与えられた設計仕様を満足するような補償器 K の設計問題を考える．その際, より現実的な設計仕様を考慮して制御系の設計を行うために，補償器の設計仕様が，閉ループ系の実現

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array}\right], \qquad \begin{array}{ll} \mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, & \mathcal{B} \in \mathbf{R}^{n\times m_1}, \\ \mathcal{C} \in \mathbf{R}^{p_1\times n}, & \mathcal{D} \in \mathbf{R}^{p_1\times m_1} \end{array} \tag{7.1}$$

に対するつぎの LMI 条件を満足する正定行列 $\mathcal{Y} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ が存在することとして与えられる場合を考える．

$$\Phi(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}\mathcal{A}, \mathcal{Y}\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) < 0 \tag{7.2}$$

ここで $\Phi(\cdot)$ は設計仕様を表す LMI のテンプレート [1][1]であり，つぎの公理を満たすものとする．

(a) $\Phi(\Theta_{\mathcal{Y}}, \Theta_{\mathcal{A}}, \Theta_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{C}}, \Theta_{\mathcal{D}})$ は $\Theta_{\mathcal{Y}} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\Theta_{\mathcal{A}} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\Theta_{\mathcal{B}} \in \mathbf{R}^{n\times m_1}$, $\Theta_{\mathcal{C}} \in \mathbf{R}^{p_1\times n}$, $\Theta_{\mathcal{D}} \in \mathbf{R}^{p_1\times m_1}$ に関して affine である．

(b) 任意の適当なサイズの行フルランクな行列 $\mathcal{T}$ に対して，

$$\Phi(\Theta_{\mathcal{Y}}, \Theta_{\mathcal{A}}, \Theta_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{C}}, \Theta_{\mathcal{D}}) < 0 \Rightarrow \Phi(\mathcal{T}\Theta_{\mathcal{Y}}\mathcal{T}^T, \mathcal{T}\Theta_{\mathcal{A}}\mathcal{T}^T, \mathcal{T}\Theta_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{C}}\mathcal{T}^T, \Theta_{\mathcal{D}}) < 0. \tag{7.3}$$

(c) (7.2) 式 を満足する $\mathcal{Y} > 0$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ と，

$$\Phi(Y_0, Y_0A_0, 0_{n_0\times m_1}, 0_{p_1\times n_0}, 0_{p_1\times m_1}) < 0 \tag{7.4}$$

[1]文献 [1] と同様に，各 n で定義される $\Phi_{(n)}(\cdot)$ の関数族を考え，これを簡単のため $\Phi(\cdot)$ と記述する

を満足する正定行列 $Y_0 \in \mathbf{R}^{n_0 \times n_0}$ と行列 $A_0 \in \mathbf{R}^{n_0 \times n_0}$ および適当なサイズの任意の行列 $\mathcal{A}_{12}, \mathcal{C}_2$ に対して，十分大きな $\alpha > 0$ が存在して，

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \mathcal{Y} & 0 \\ 0 & \alpha Y_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}\mathcal{A} & \mathcal{Y}\mathcal{A}_{12} \\ 0 & \alpha Y_0 A_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}\mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{C}_2 \end{bmatrix}, \mathcal{D}\right) < 0 \tag{7.5}$$

が成立する．

$\Phi(\cdot)$ を用いることにより $\mathcal{H}_2$ / $\mathcal{H}_\infty$ ノルム制約や，領域極配置条件などの設計仕様を表すことができる．また，複数の設計仕様に対応したリアプノフ不等式の共通解を用いるという保守性を許せば，与えられた閉ループ系がこれら複数の設計仕様を同時に満足することを，$\Phi(\cdot)$ を用いて判定することができる．さらに，解析に用いた $\Phi(\cdot)$ に変数変換をほどこすことにより，ただちに設計問題の解を得ることができる [10, 38, 1]. なお本章では，与えられたシステム Σ

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & D_0 \end{array}\right] \tag{7.6}$$

に対して (7.4) 式 を満足する $Y_0 > 0$ が存在するとき，Σ は安定であると記述する．これにより，安定領域が複素開左半平面 (連続時間) や開単位円板 (離散時間) として与えられる場合に限らず，LMI を用いて記述された凸領域 (LMI 領域) [39] として与えられる場合を統一的に表現することができる．

注意 **7.1** *(a),(b)* は文献 *[1]* に共通の公理である．一方 *(c)* は，文献 *[1]* の特別な場合を与えており，設計仕様を満足する閉ループ系が与えられたとき，安定な隠れモードを付加した閉ループ系の状態空間実現

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathcal{A} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{B} \\ 0 & A_0 & 0 \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{C}_2 & \mathcal{D} \end{array}\right] \tag{7.7}$$

もまた設計仕様を満足することを要求している．

以上のもとで，つぎの問題を考える．

問題 **7.1** G は与えられた一般化プラントであるとする．*Fig. 7.1* の w から z までの閉ループ伝達関数の実現 *(7.1)* 式 に対して *(7.2)* 式 の *LMI* を満足する $\mathcal{Y} > 0$ が存在するような補償器 K を求めよ．

従来の解法 [10, 38] を用いて問題 7.1 の補償器を得ることができる．しかし設計仕様が複雑になると，補償器の次数が高くなる，設計時の計算量が増加する，制御則の演算時間が長くなるなどの問題が生じる．一方，一般化プラントの状態の一部を観測できる場合には，文献 [1] の結果を用いれば，観測可能な状態の次数分低次の補償器を得ることができ，その結果従来の手法を用いる場合の問題点を解決することができる．これに対して本章では，一般化プラントの状態の一部を観測することはできないが，ある安定なシステムを用いて生成することができる場合を考える．この場合，その安定なシステムを陽に含む補償器を得ることができ，その結果，従来の方法を用いる場合の問題点を解決できることを示す．

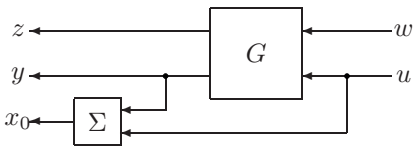


Fig. 7.2: Generalized Plant with Stable System

7.3　主要な結果

本節ではまず，一般化プラントの状態の一部をある安定なシステムを用いて生成できると仮定し，そのとき問題 7.1 が，一部の状態が観測出力に含まれるとした問題と等価であることを示す．さらに等価な問題に対する解と安定な要素を用いて問題 7.1 の補償器を構成できることを示す．つぎに，その仮定の物理的意味について述べ，仮定が成立する一般化プラントの具体例を示す．

7.3.1　等価な問題

定理 7.1 与えられた n 次の一般化プラント G

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right], \quad D_{11} \in \mathbf{R}^{p_1 \times m_1}, \quad D_{22} \in \mathbf{R}^{p_2 \times m_2} \tag{7.8}$$

に対して，ある安定な $n_0 \leq n$ 次のシステム Σ

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|cc} A_0 & B_{0y} & B_{0u} \\ \hline I_{n_0} & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.9}$$

と正則な行列 S および適当な行列 $A_{12}, C_{12}, C_{22}, C_{32}$ が存在して，*Fig. 7.2* のシステムの状態空間実現がつぎのように相似変換されると仮定する．

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} S^{-1} \end{matrix}\left[\begin{array}{cc} A & 0 \\ B_{0y}C_2 & A_0 \end{array}\right] S & S^{-1}\left[\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ B_{0y}D_{21} & B_{0y}D_{22}+B_{0u} \end{array}\right] \\ \hline \left[\begin{array}{cc} C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \\ 0 & I \end{array}\right] S & \left[\begin{array}{cc} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A & A_{12} & B_1 & B_2 \\ 0 & A_0 & 0 & 0 \\ \hline C_1 & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & C_{22} & D_{21} & D_{22} \\ J & C_{32} & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.10}$$

ただし，

$$J := \left[\begin{array}{cc} 0_{n_0 \times (n-n_0)} & I_{n_0} \end{array}\right]. \tag{7.11}$$

このとき，つぎの *2* つの条件は等価である．

(i) 問題 *7.1* の解 K が存在する．

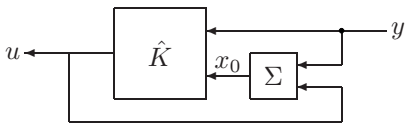


Fig. 7.3: Structure of Controller

(ii) $\hat{K}$ と $\mathcal{Y} > 0$ が存在して，$\hat{K}$ と $\hat{G}$

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \\ J & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.12}$$

からなる閉ループ系の状態空間実現が *(7.2)* 式 の設計仕様を満足する．

さらに *(ii)* の条件を満足する $\hat{K}$ が存在するとき，以下の K は *(i)* の条件を満足する．

$$K = \left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}_K & \hat{B}_{K_{x_0}} & \hat{B}_{K_y} \\ B_{0u}\hat{C}_K & A_0 + B_{0u}\hat{D}_{K_{x_0}} & B_{0y} + B_{0u}\hat{D}_{K_y} \\ \hline \hat{C}_K & \hat{D}_{K_{x_0}} & \hat{D}_{K_y} \end{array}\right] \tag{7.13}$$

ただし，*Fig. 7.2* の y と x_0 に対応させて $\hat{K}$ の状態空間実現をつぎのように表す．

$$\hat{K} = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_K & \hat{B}_{K_y} & \hat{B}_{K_{x_0}} \\ \hline \hat{C}_K & \hat{D}_{K_y} & \hat{D}_{K_{x_0}} \end{array}\right] \tag{7.14}$$

証明 付録 B.1 を参照．□

(7.12) 式 は，G の n 個の状態のうち n_0 個の状態を観測できるように変更したシステムである．よって，(ii) の設計問題に対して文献 [1] の手法 (付録定理 B.1) を用いれば，$n - n_0$ 次の $\hat{K}$ を得ることができる．Σ の次数が n_0 であることから，最終的な補償器 (7.13) 式 の次数は n となる．

(7.13) 式 の補償器の状態空間実現が Fig. 7.3 のシステムの状態空間実現に等しいことは容易に確認できる．

以上より 定理 7.1 の仮定が成立する場合には，定理 7.1 の結果を用いることにより，フルオーダの設計を行う場合と同じ次数でなおかつ，Σ を陽に含む補償器を得ることができる．

注意 **7.2** 一般化プラントが外乱 w の影響を受けない場合，u, y からプラントの状態を推定するためには，G_{22} *(u から y までの伝達関数)* に対するオブザーバを構成すればよい．しかし，一般化プラントが外乱 w の影響を受ける場合には，G_{22} に対するオブザーバを構成しても，一般化プラントの状態が推定できるとは限らない．これに対して，定理 *7.1* の仮定は，一般化プラントが外乱 w の影響を受ける場合でも，その状態の一部を推定するシステム Σ が存在することを要求している．

実際に G_{22} に対するオブザーバを構成すると，*Fig. 7.2* の状態空間実現はつぎのように書ける．

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A+LC_2 & -LC_2 & -LD_{21} & B_2 \\ 0 & A & B_1 & B_2 \\ \hline 0 & C_1 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{21} & D_{22} \\ I & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.15}$$

ただし Σ は G_{22} に対するオブザーバで，$A+LC_2$ が安定となるような行列 L を用いてつぎのように構成される．

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|cc} A+LC_2 & -L & B_2+LD_{22} \\ \hline I & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.16}$$

(7.15) 式の状態空間実現を相似変換すると，つぎの状態空間実現を得る．

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A+LC_2 & 0 & -B_1-LD_{21} & 0 \\ 0 & A & B_1 & B_2 \\ \hline 0 & C_1 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{21} & D_{22} \\ I & I & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ここで，行列 L が

$$B_1 + LD_{21} = 0 \tag{7.17}$$

を満足する場合には，$A+LC_2$ が安定な隠れモードとなり，これを消去したシステムの状態空間実現は

$$\left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \\ I & 0 & 0 \end{array}\right]$$

となる．最下行に単位行列が現れていることから，Σ は一般化プラントの状態を推定するオブザーバとなっていることがわかる．しかしながら一般には，$A+LC_2$ を安定化し，かつ，*(7.17)* 式 を満足するような行列 L を構成できるとは限らない．

より限定的な状況は，$\mathcal{H}_\infty$ 制御問題において，*FI* 問題と *DF* 問題の等価性を示す際に扱われている *[11]*. *DF* 問題は，$D_{21}=I, D_{22}=0$ の場合である．この場合には，$L=-B_1$ とおけば *(7.17)* 式 が成立する．よって，$A-B_1C_2$ が安定である場合には，G_{22} に対するオブザーバを構成すれば，外乱 w を受ける一般化プラントの状態を推定することができる．

このように，一般化プラントが外乱 w の影響を受ける場合でも，一般化プラントの状態を推定するオブザーバを構成できる場合がある．定理 *7.1* の仮定は，以上のことをより一般的に表現したものである．

注意 **7.3** *(7.9)* 式 では Σ の直達項を 0 としているが，これは本質的な制限ではない．Σ の直達項を非零とする場合でも，*Fig. 7.2* を相似変換したシステムの状態空間実現が *(7.10)* 式 右辺の形で表現できる場合には，定理 *7.1* の結果はそのまま成立する．

Σ の直達項が非零の場合を積極的に考える動機の一つには，以下に示す最小次元オブザーバがある．一般化プラント G がつぎのように与えられたとする．

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ \hline C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ 0 & I & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y が一般化プラントの状態の一部になっていることに注意する．$w = 0$ の場合には，G に対する最小次元オブザーバはつぎのように構成される *[40]*.

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} - LA_{21} & A_{11}L - LA_{21}L + A_{12} - LA_{22} & B_{12} - LB_{22} \\ \hline I & L & 0 \end{array}\right]$$

ただし，L は $A_{11} - LA_{21}$ を安定とする行列で，この行列が非零の場合には，Σ の直達項も非零となる．G が w の影響を受ける場合でも上記 Σ がオブザーバとして働くためには，$B_{11} - LB_{21} = 0$ が成立すれば十分である．このことは，*Fig. 7.2* の状態空間実現を計算することにより容易に確かめることができる．たとえば，$B_{21} = I$ かつ $A_{11} - B_{11}A_{21}$ が安定である場合には，$L = B_{11}$ と選べば Σ は最小次元オブザーバとなる．

7.3.2 仮定の物理的意味と仮定が成立する一般化プラントの例

定理 7.1 の仮定は，与えられた一般化プラント G に対してある安定なシステム Σ が存在してつぎの 2 つが成立することを要求している: (1) Fig. 7.2 のシステムの状態空間実現に対して (7.10) 式 左辺のように相似変換を行うと，(7.10) 式 右辺のように A_0 に対応する状態が不可制御となる; (2) この不可制御モードを消去した Fig. 7.2 のシステムの状態空間実現が (7.12) 式 と等価になる．ここで $\hat{G}$ の行列 J に対応する出力は，Fig. 7.2 の Σ の出力 x_0 に対応している．よって，Σ は観測出力 y と制御入力 u から一般化プラント G の状態の一部を生成するシステムになっている．

与えられた一般化プラント G に対して，このようなシステム Σ が存在するかどうか調べることは一般には容易ではない．しかし，以下に示すような一般化プラントの場合には，条件を満足する Σ が存在することを容易に確認することができる．

(1) 制御入力に安定なシステムが接続されている場合

定理 7.1 の仮定は，適当なシステム $\bar{G}$ と安定なシステム H_u を用いて Fig. 7.4 のように構成される一般化プラント G に対して成立する．

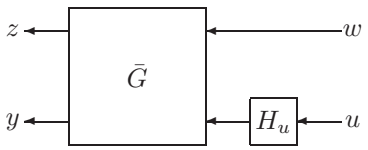


Fig. 7.4: Generalized Plant with Pre-Inserted Stable Element

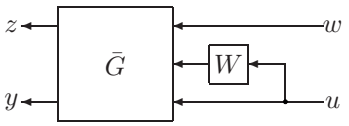


Fig. 7.5: Evaluation of Control Input

実際に，$\bar{G}$ と H_u の状態空間実現が

$$\bar{G} = \left[\begin{array}{c|cc} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \hline \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{array}\right], \quad H_u = \left[\begin{array}{c|c} A_H & B_H \\ \hline C_H & D_H \end{array}\right] \tag{7.18}$$

と与えられる場合には，G を

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{A} & \bar{B}_2 C_H & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 D_H \\ 0 & A_H & 0 & B_H \\ \hline \bar{C}_1 & \bar{D}_{12} C_H & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} D_H \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{22} C_H & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} D_H \end{array}\right] \tag{7.19}$$

と書くことができ，

$$A_0 = A_H,\ B_{0y} = 0,\ B_{0u} = B_H \tag{7.20}$$

$$S = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ J & I \end{array}\right],\ A_{12} = 0,\ C_{12} = 0,\ C_{22} = 0,\ C_{32} = I \tag{7.21}$$

とおけば (7.10) 式 が成立する．

このクラスに属する典型的な一般化プラントは，制御入力を評価する場合である．補償器の帯域を制限したい場合や，制御入力が飽和するのを防ぎたい場合には，制御入力に重みをかけて，これを評価することが行われるが，この場合，一般化プラント G は適当なシステム $\bar{G}$ と重みを W を用いて Fig. 7.5 のように構成される．このとき，$H_u = \left[\begin{array}{cc} W^T & I \end{array}\right]^T$ とおけば，G は Fig. 7.4 の構造を有し，G に対して 定理 7.1 の仮定が成立する．一方，H_u を離散時間のむだ時間要素とすれば，Fig. 7.4 は離散時間入力むだ時間系の一般化プラントを表現することもできる．

(2) 観測出力に安定なシステムが接続されている場合

定理 7.1 の仮定は，一般化プラント G が適当なシステム $\bar{G}$ と安定なシステム H_y を用いて Fig. 7.6 のように構成される場合にも成立する．

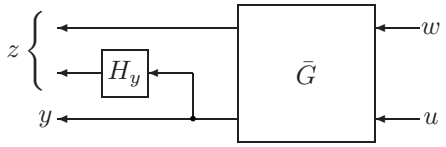


Fig. 7.6: Generalized Plant with Post-Inserted Stable Element

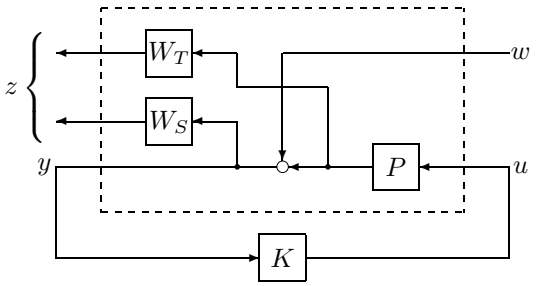


Fig. 7.7: Mixed Sensitivity Problem

この場合には，G の状態空間実現を

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{A} & 0 & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ B_H\bar{C}_2 & A_H & B_H\bar{D}_{21} & B_H\bar{D}_{22} \\ \hline \bar{C}_1 & 0 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ D_H\bar{C}_2 & C_H & D_H\bar{D}_{21} & D_H\bar{D}_{22} \\ \hdashline \bar{C}_2 & 0 & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{array}\right] \tag{7.22}$$

と書くことができ，

$$A_0 = A_H,\ B_{0y} = B_H,\ B_{0u} = 0 \tag{7.23}$$

とおけば (7.10) 式 が成立する．ただし，$\bar{G}$, H_y の状態空間実現は (7.18) 式 と同様に与えられ，S, A_{12}, C_{12}, C_{22}, C_{32} は (7.21) 式 で与えられる．

外乱抑制を行う場合やレギュレータ問題など，観測出力をできるだけ小さくしたい場合などがこのクラスの一般化プラントの具体的な例である．このような場合には，重みづけされた観測出力を評価することが行われるが，そうした場合には H_y は重み関数に対応する．また，Fig. 7.7 に示す混合感度問題の場合には，H_y は感度関数に対する重み W_S に対応する．

(3) (1),(2) を組み合わせた場合

上記 (1), (2) が組み合わさった場合は上記 2 つのクラス双方の特別な場合となるので，定理 7.1 の仮定が成立する．ただしこの場合には，H_u, H_y 双方の動特性を Σ に持たせることができる．

以上のように，制御入力と観測出力に安定な要素が接続された一般化プラントに対して，提案手法を適用して構造を持つ補償器の設計を行うことができる．以下では 3 節にわたり，提案手法と従来手法の関連，提案手法を用いる利点について述べる．

7.4 従来の手法との関連

前節までに，定理 7.1 の仮定が成立する場合，提案手法により構造を持つ補償器が得られることがわかった．本節では，混合感度問題に対して従来の設計を行う場合でも提案手法と同様の構造を持つ補償器が得られることを指摘し，提案手法との関連について述べる．

文献 [41] では，Fig. 7.7 の混合感度問題に対してリカッチ方程式に基づいて $\mathcal{H}_\infty$ 補償器を設計する場合，$P(s)$ が安定ならば，1 本のリカッチ方程式を解くことにより補償器を構成できることを示している．ただし，$P(s)$, $W_S(s)$, $W_T(s)$ はプラント，感度関数に対する重み，相補感度関数に対する重み関数で，それぞれつぎのように与えられる．

$$\begin{bmatrix} P(s) \\ W_T(s)P(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \\ C_t & I \end{array}\right] \tag{7.24}$$

$$W_S(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_s & B_s \\ \hline C_s & 0 \end{array}\right] \tag{7.25}$$

注意 7.4 *[41]* では標準 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の仮定 *(D_{12} の列フルランク性)* を満足し，かつインプロパな W_T を扱えるようにするために *(7.24)* 式 を仮定している．しかし，提案手法では D_{12} が列フルランクである必要はなく，*(7.24)* 式 が成立しない場合でも，提案手法を用いて構造を持つ補償器の設計を行うことができる．

この問題は，(7.8) 式 の一般化プラント G が

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c:c} A_s & B_sC_p & B_s & 0 \\ 0 & A_p & 0 & B_p \\ \hline C_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_t & 0 & I \\ \hdashline 0 & C_p & I & 0 \end{array}\right] \tag{7.26}$$

と与えられる $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題である．この場合，補償器の中心解 $K(s)$ はつぎのように与えられる．

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} (A - B_1D_{21}^TC_2) - B_2F & B_1D_{21}^T \\ \hline -F & 0 \end{array}\right] \tag{7.27}$$

ここで，

$$F = D_{12}^TC_1 + B_2^TX, \quad X = X^T \geq 0 \tag{7.28}$$

で，X はハミルトン行列 H_X

$$H_X = \begin{bmatrix} A - B_2D_{12}^TC_1 & B_1B_1^T/\gamma^2 - B_2B_2^T \\ C_1^T(D_{12}D_{12}^T - I)C_1 & -(A - B_2D_{12}^TC_1)^T \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

に対するリカッチ方程式の安定化解である．(7.27) 式 に一般化プラントのデータを代入すると，補償器に関するつぎの状態方程式を得る．

$$u = -Fx_K \tag{7.30}$$

$$\dot{x}_K = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_p \end{bmatrix} x_K + \begin{bmatrix} B_s \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} u \tag{7.31}$$

ここで，x_K は $K(s)$ の状態である．(7.31) 式 より，x_K は $W_S(s)$ と $P(s)$ の状態を並べたものになっている．すなわち，$K(s)$ は一般化プラントの状態を生成するシステムを陽に持つ構造になっている．

一方，Fig. 7.7 の一般化プラントは，Fig. 7.4 および Fig. 7.6 においてそれぞれ

$$H_u = \begin{bmatrix} W_T P \\ P \end{bmatrix}, \quad H_y = W_S$$

とおく場合に対応する．よって，第 7.3.2 節 (3) で述べたように，提案手法を用いて構造を持つ補償器の設計を行うことが可能である．このとき Σ の係数行列は

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, \; B_{0y} = \begin{bmatrix} B_s \\ 0 \end{bmatrix}, \; B_{0u} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

と書ける．ここで A_0 の次数 n_0 が一般化プラントの次数 n に一致することから，定理 7.1 (ii) の $\hat{K}$ の設計問題では一般化プラントの全状態を観測できる．よって，文献 [1] の手法 (付録定理 B.1) を用いれば，定数行列の $\hat{K}$ を得ることができる．これを

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{D}_{K_y} & \hat{D}_{K_{x_0}} \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

とおき，Σ の状態を x_0 とすると補償器全体の状態方程式をつぎのように書くことができる．

$$u = \hat{D}_{K_y} y + \hat{D}_{K_{x_0}} x_0 \tag{7.34}$$

$$\dot{x}_0 = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_p \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} B_s \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} u \tag{7.35}$$

(7.35) 式は Σ の状態方程式であり，また，これが (7.31) 式と同じ形になっていることから，リカッチ解による補償器は提案手法の補償器と同様に，Σ を陽に含む構造になっていることがわかる．

以上のようにプラントが安定な場合の混合感度問題では，リカッチ方程式を用いて，プラントの状態を生成するシステムを陽に持つ補償器を得ることができる．しかし, その場合の設計仕様は $\mathcal{H}_\infty$ ノルム制約に限定されており，より一般的な設計仕様を与えた場合にも同様の構造を持つ補償器が得られることは知られていない．一方，LMI を用いれば，より一般的な設計仕様を考慮して補償器の設計を行うことができる．しかしその場合，同様の構造を持つ補償器が得られることは知られていない．提案手法を用いれば，LMI を用いて一般的な設計仕様を考慮しかつ一般化プラントの状態を生成するシステムを陽に持つ補償器を得ることができる．さらに，前節で述べたように，混合感度問題の一般化プラントを含むより広いクラスの一般化プラントに対しても，構造を持つ補償器を設計することができる．

7.5 設計時の計算量の低減

前節で述べたように，混合感度問題に対してリカッチ方程式を用いて補償器の設計を行う場合には，プラントが安定であることを利用することによって解くべきリカッチ方程式が 1 本になるため，補償器設計時の計算量が低減される．

Table. 7.1: Estimated Computational Cost for Controller Synthesis

	LMI の変数			LMI のサイズ
	X	NY	M	
従来手法	n^2	n^2	$(n+m_2)(n+p_2)$	$(2n+p_1)(2n+m_1)$
提案手法	n^2	$(n-n_0)n$	$(n-n_0+m_2)(n+p_2)$	$(2n-n_0+p_1)(2n-n_0+m_1)$

本節では，定理 7.1 の仮定を満足する一般化プラントに対して提案手法を用いて補償器の設計を行う場合にも，補償器設計時の計算量が低減されることを示す．つぎの 2 つの手法を比較する．

(1) 従来手法

問題 7.1 に対してフルオーダの補償器 K を設計する．

(2) 提案手法

定理 7.1 の結果を用いて Σ を陽に持つ補償器を設計する．この場合補償器は，Σ と定理 7.1 (ii) の設計問題の解 $\hat{K}$ から構成される．よって，LMI の解を求めるために必要な計算量は $\hat{K}$ の計算量のみで決定される．

従来手法と提案手法の補償器設計時の計算量を比較する．これら 2 つの手法に対して，本章では文献 [1] の結果を用いることを考える．すなわち，付録の 定理 B.1 において従来手法では $n_0 = 0$, 提案手法では Σ の次数を n_0 として補償器の設計を行う．ここで示す結果は文献 [1] の結果から直接導かれるものである．ただし，文献 [1] ではこのような計算量の比較は行われていない．

実際の計算量を見積もるのは困難であるため，ここでは定理 B.1 の変数 X, NY [2], M のサイズと LMI 全体のサイズについて従来手法と提案手法を比較する．ただし前者については必要となるスカラ変数の数, 後者については目安として (B.14) 式 の Θ のサイズを考える．結果を Table. 7.1 に示す．提案手法を用いる場合には，変数のサイズと LMI 全体のサイズが共に減少し，LMI を解く際の計算量が低減されることがわかる．前節で述べた混合感度問題の場合には，変数 NY が LMI から消去される．この結果は，リカッチ方程式を用いた場合に，解くべきリカッチ方程式が 1 本になることに対応する．

7.6　実装時の計算量の低減

前節では補償器設計時における提案手法の利点を示した．本節では, 補償器実装時の計算量について検討を行う．

補償器実装時の計算量には補償器の次数が支配的である．ところが，提案手法により得られる補償器の次数はフルオーダの設計を行って得られる補償器の次数に等しいため，次数だけに着目して計算量を議論することはできない．しかしながら，提案手法の補償器は従来手法の補償器と異なり，Σ を陽に持つ構造となっている．以下では，この構造を利用することにより補償器実装時の計算量を低減できることを示す．なお，ここでは計算機上への実装を前提として離散時間の補償器を考える．また簡単のため，

[2]定理 B.1 を用いる場合，NY を一つの変数として定義することができる

観測出力 y と制御入力 u の次数を 1 と仮定する．

7.6.1 補償器実装の方法

第 7.5 節 で示した「従来手法」および「提案手法」により設計された補償器を実装するための手法を示し，実装時の計算量を比較する．ここで比較する手法は，従来より知られている 2 種類の手法と，提案手法の補償器を実装するために本節で提案する 3 種類の手法である．以下では，それらの手法の具体的な内容を記す．

(1) 従来手法 1

従来手法により得られたフルオーダの補償器をそのまま実装する．

(2) 従来手法 2

計算量の低減を図るために，従来手法で得られた補償器を可観測正準形または可制御正準形に変換してから実装する．ただし，正準形に変換する場合には量子化誤差が問題となることがあり [42], そのような場合には本手法を適用することはできない．

提案手法 1 提案手法を用いて得られる (7.13) 式 の補償器を，つぎの状態方程式を用いて実装する．

$$\sigma x_K = \hat{A}_K x_K + \hat{B}_{K_y} y + \hat{B}_{K_{x_0}} x_0 \tag{7.36}$$

$$u = \hat{C}_K x_K + \hat{D}_{K_y} y + \hat{D}_{K_{x_0}} x_0 \tag{7.37}$$

$$\sigma x_0 = A_0 x_0 + B_{0y} y + B_{0u} u \tag{7.38}$$

ただし x_K, x_0 はそれぞれ $\hat{K}$, Σ の状態である．後でさらに計算量の低減を考えるときに都合がよいように，(7.36) 式 ~ (7.38) 式 をつぎのシステムで表しておく．

$$u = K_i(z) \begin{bmatrix} u & y \end{bmatrix}^T \tag{7.39}$$

$$K_i(z) := \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{A}_K & \hat{B}_{K_{x_0}} & 0 & \hat{B}_{K_y} \\ 0 & A_0 & B_{0u} & B_{0y} \\ \hline \hat{C}_K & \hat{D}_{K_{x_0}} & 0 & \hat{D}_{K_y} \end{array}\right] \tag{7.40}$$

提案手法 2 (7.40) 式 の A 行列がブロック三角行列になっていることを利用して計算量をさらに低減させる．一般性を失うことなく $\hat{A}_K$ と A_0 の固有値が

$$\lambda_i(\hat{A}_K) + \lambda_j(A_0) \neq 0 \quad (i = 1, \cdots, n - n_0, j = 1, \cdots, n_0)$$

を満足すると仮定する．もし満足しない場合には，十分小さな実数 ϵ を用いて $\hat{A}_K + \epsilon I$ を改めて $\hat{A}_K$ とおけばよい．このとき，Sylvester 方程式

$$-\hat{A}_K T + T A_0 + \hat{B}_{K_{x_0}} = 0 \tag{7.41}$$

は一意解 T を持つ．ここで，正則行列 $\begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix}$ を用いて (7.40) 式 の $K_i(z)$ を相似変換したものを $K_i'(z)$ とおくと

$$\begin{aligned} K_i'(z) &:= \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{A}_K & 0 & TB_{0y} & \hat{B}'_{K_y} \\ 0 & A_0 & B_{0y} & B_{0u} \\ \hline \hat{C}_K & \hat{D}'_{K_{x_0}} & 0 & D_{K_y} \end{array}\right] \\ \hat{B}'_{K_y} &:= \hat{B}_{K_y} + TB_{0u}, \quad \hat{D}'_{K_{x_0}} := \hat{D}_{K_{x_0}} - \hat{C}_K T \end{aligned} \tag{7.42}$$

を得る．これを実装する．(7.42) 式 は (7.40) 式 とは異なり，A 行列の右上ブロックが 0 になっている．

提案手法 3　(7.42) 式 を可観測正準形に変換して実装する．ただし，従来手法 2 と同様に，正準形に変換する際の計算精度が問題となる場合には適用できない．

7.6.2　計算量の比較

各手法の計算量を Table. 7.2 に示す．ここでは簡単のため，制御則の 1 ステップ分の演算に必要となる乗算の回数のみを表示している．

$n - n_0 > 1$ のとき，提案手法 1 の計算量は，第 2 項 $-n_0(n - n_0 - 1)$ が負となることから，従来手法 1 の計算量よりも低くなる．さらに，$n_0 > 1$ の場合，

$$-n_0(n - n_0 - 1) > -2n_0(n - n_0) + n$$

が成立することから，提案手法 2 の計算量は提案手法 1 の計算量よりも低くなる．しかしながら正準形を用いる場合には，提案手法 3 は従来手法 2 に比べて計算量を低減させることができない．

提案手法の補償器には Σ が陽に含まれているため，Σ の計算量が低い場合には，従来手法に比べて補償器全体の計算量の低減が期待できる．特に，入力端に n_0 次の離散時間むだ時間要素を持つ一般化プラントの場合には，むだ時間要素 z^{-n_0} の状態空間実現

$$z^{-n_0} = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline C_d & 0 \end{array}\right] := \left[\begin{array}{cc|c} 0 & I_{n_0-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.43}$$

を用いて $\Sigma(z)$ を

$$\Sigma(z) = \left[\begin{array}{c|cc} A_d & 0 & B_d \\ \hline I & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.44}$$

と与えることができ，シフト演算のみを用いて $\Sigma(z)$ を実装することができる．この場合の補償器全体の計算量を Table. 7.3 に示す．ただし，提案手法 3 では，(7.42) 式 の実現全体を可観測正準形に変換するかわりに，$\hat{K}(z)$ の実現だけを変換することとする．従来手法の計算量は Table. 7.2 と共通である．表

Table. 7.2: Estimated Computational Cost for Controller Implementation (General Case)

	計算量 (乗算の回数)
従来手法 1	$(n+1)^2$
従来手法 2	$2n+1$
提案手法 1	$(n+1)^2 - n_0(n-n_0-1)$
提案手法 2	$(n+1)^2 - 2n_0(n-n_0)+n$
提案手法 3	$3n+1$

Table. 7.3: Estimated Computational Cost for Controller Implementation (Input Delay Systems Case)

	計算量 (乗算の回数)
提案手法 1	$(n-n_0+1)(n+1)$
提案手法 2	$(n-n_0+1)(n+1)-(n-n_0)(n_0-1)$
提案手法 3	$3n-2n_0+1$

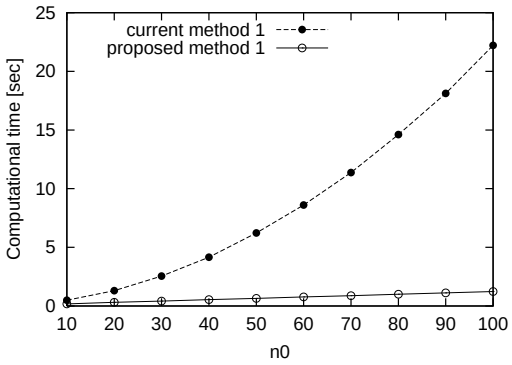
より，提案手法 1,2 の計算量には n_0^2 の項が含まれておらず，n_0 が大きい場合には，従来手法 1 に比べて計算量を大幅に低減させることができる．また，$n > n_0$ かつ $n_0 > 1$ のとき，提案手法 2 の計算量は提案手法 1 よりも低くなる．一方，正準形を用いる場合でも，$2n_0 > n$ が成立するならば，提案手法 3 の計算量は，従来手法 2 よりも低くなる．

7.6.3 シミュレーション

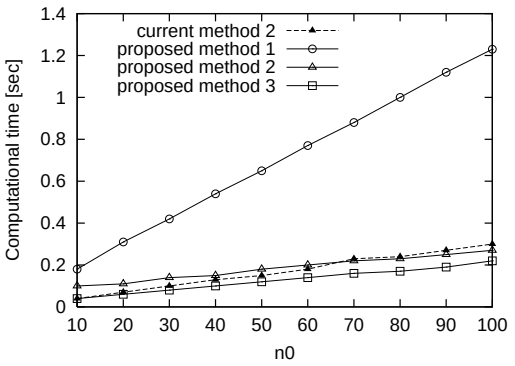
実際に計算機 (Pentium 600MHz) 上でシミュレーションを行い，離散時間入力むだ時間系の場合に 第 7.6.1 節 で示した 5 つの方法の計算時間を比較する．提案手法では, (7.44) 式 の $\Sigma(z)$ の計算を行うためにシフトを行う必要があるが, リングバッファを構成すれば, 実際にシフトを行う必要はない.

$\hat{K}(z)$ の次数を 5 とし，むだ時間要素の次数 n_0 を 10 から 100 まで変える．また，コントローラの実現と観測出力は乱数により設定し，実装時の計算を模擬することとした．5000 ステップ分の繰り返し計算に要した計算時間の計測結果を Fig. 7.8 に示す．

Fig. 7.8(a) より，従来手法 1 の計算時間よりも，提案手法 1 の計算時間の方が短いことがわかる．また，n_0 の増加にともない，従来手法 1 の計算時間は n_0^2 オーダで増加しているのに対して，提案手法 1 の計算時間は直線的に増加している．また，Fig. 7.8(b) より，提案手法 2 の計算時間も n_0 と直線関係にあるが，その傾きが，提案手法 1 の約 1/6 に抑えられている．さらに可観測正準形を用いる場合，Fig. 7.8(b) の従来手法 2 と提案手法 3 を比較すると，$n_0 = 10$ の場合には両者の計算時間はほぼ等しいが，それ以外の場合には提案手法 3 の計算時間の方が短く，n_0 が大きくなるにつれて両者の差は大きくなっている．



(a) current method 1 and proposed method 1



(b) current method 2 and the proposed methods

Fig. 7.8: Computational Time vs n_0

7.7　ゲインスケジューリング手法を適用する場合への拡張

第 3 章, 第 6 章 では，保守性の低い補償器設計を行うために，補償器の構造を LPV やむだ時間要素の LFT としてゲインスケジューリング手法を適用した．本節では，このような保守性の低い設計を行い，なおかつ，構造を持つ補償器を得るために，本章前節までに得られた結果を拡張する．すなわち，前節までは，有限次元 LTI のプラントと補償器からなる閉ループ系を考え，制御入力 u と観測出力 y からプラントの状態を生成する安定なシステム要素が存在する場合に，そのシステムを持つ補償器が得られることを示したが，本節では，LPV やむだ時間要素の LFT 等で表されたプラントおよび補償器からなる閉ループ系を考え，制御入力 u と観測出力 y からプラントの状態およびパラメータやむだ時間要素の出力を生成する安定なシステムが存在する場合に，そのシステムを持つ補償器が得られることを示す．また，この結果と 第 3 章, 第 6 章 の結果との関連について述べる．

7.7.1　問題設定

Fig. 7.9 の閉ループ系が与えられた設計仕様を満足するように補償器の一部 K を設計することを考える．ただし，θ はノルム有界の適当な集合の要素であり，時変パラメータやむだ時間要素などに対応する．以降では便宜上，θ をスケジューリングパラメータと呼ぶ．第 3 章 の場合には，Fig. 3.5 が Fig. 7.9 に対応する．ただし，(3.9) 式 を用いて θ_p を $(1-\alpha)\theta+\alpha\delta$ で置き換え，さらに，一般化プラントを θ と δ の LFT で表した場合の閉ループ系が Fig. 7.9 に対応する．また，第 6 章 の場合には，Fig. 6.6 が Fig. 7.9 に対応する．

文献 [4] では，θ が，各時刻における絶対値が 1 以下の時変パラメータである場合に，Fig. 7.9 の閉ループ系を内部安定化し，かつ w から z までの $\mathcal{L}_2$ 誘導ノルムを抑えるような K の設計問題を考えている．そこでは，プラントと補償器双方の θ に対するスモールゲイン条件を用いることにより，G_{cl} と

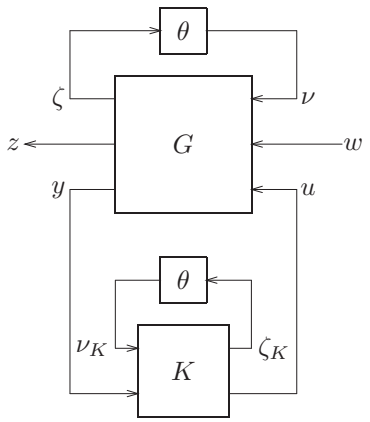


Fig. 7.9: Gain Scheduling

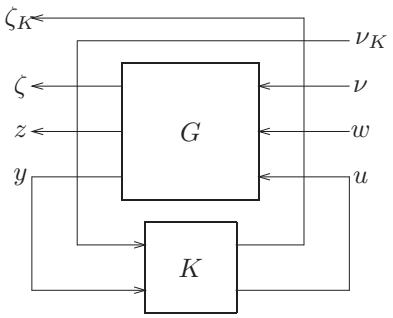


Fig. 7.10: Closed-loop System

K からなる閉ループ系を内部安定化し，かつ，

$$\left\| \begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} G_{cl} \star K \begin{bmatrix} D^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \tag{7.45}$$

を満足するスケーリング行列 $D > 0$ と，補償器 K を求めている．ただし，Fig. 7.9 における一般化プラント G の状態空間実現を

$$G = \left[\begin{array}{c|ccc} A_{ss} & A_{s\theta} & B_{1s} & B_{2s} \\ \hline A_{\theta s} & A_{\theta\theta} & B_{1\theta} & B_{2\theta} \\ C_{1s} & C_{1\theta} & D_{11} & D_{12} \\ C_{2s} & C_{2\theta} & D_{21} & 0_{p_2 \times m_2} \end{array}\right], \quad A_{ss} \in \mathbf{R}^{n_s \times n_s}, \quad A_{\theta\theta} \in \mathbf{R}^{n_\theta \times n_\theta}, \quad D_{11} \in \mathbf{R}^{p_1 \times m_1} \tag{7.46}$$

と与え，これを用いて G_{cl} をつぎのようにおく[3].

$$G_{cl} = \left[\begin{array}{c|cc:c:c:c} A_{ss} & A_{s\theta} & 0 & B_{1s} & 0 & B_{2s} \\ \hline A_{\theta s} & A_{\theta\theta} & 0 & B_{1\theta} & 0 & B_{2\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \hdashline C_{1s} & C_{1\theta} & 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ \hdashline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ C_{2s} & C_{2\theta} & 0 & D_{21} & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.47}$$

そこで本節でも，制御系の設計仕様が $G_{cl} \star K$ を用いて記述される場合を考える．ただし，(7.45) 式の定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ ノルム制約だけでなく，より一般的な状況を考慮するために，設計仕様が $G_{cl} \star K$ の閉ループ系の実現

$$\left[\begin{array}{c|cc} \mathcal{A}_{ss} & \mathcal{A}_{s\theta} & \mathcal{B}_s \\ \hline \mathcal{A}_{\theta s} & \mathcal{A}_{\theta\theta} & \mathcal{B}_\theta \\ \mathcal{C}_s & \mathcal{C}_\theta & \mathcal{D} \end{array}\right], \quad \mathcal{A}_{ss} \in \mathbf{R}^{n_s \times n_s}, \mathcal{A}_{\theta\theta} \in \mathbf{R}^{n_\theta \times n_\theta}, \quad \mathcal{D} \in \mathbf{R}^{p_1 \times m_1} \tag{7.48}$$

[3] G_{cl} は，Fig. 7.10 の閉ループ系から K を取り除いたシステムの状態空間実現を表している

に対するつぎの LMI 条件を満足する $\mathcal{Y}_s \in \mathbf{R}^{n_s \times n_s}$, $\mathcal{Y}_\theta \in \mathbf{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ が存在することとして与えられる場合を考える．

$$\Phi(\mathcal{Y}_s, \mathcal{Y}_\theta, \mathcal{Y}_s\mathcal{A}_{ss}, \mathcal{Y}_s\mathcal{A}_{s\theta}, \mathcal{Y}_s\mathcal{B}_s, \mathcal{Y}_\theta\mathcal{A}_{\theta s}, \mathcal{Y}_\theta\mathcal{A}_{\theta\theta}, \mathcal{Y}_\theta\mathcal{B}_\theta, \mathcal{C}_s, \mathcal{C}_\theta, \mathcal{D}) < 0 \tag{7.49}$$

ここで，$\Phi(\cdot)$ はつぎの公理を満たすものとする．

(a) $\Phi(\Theta_{\mathcal{Y}_s}, \Theta_{\mathcal{Y}_\theta}, \Theta_{\mathcal{A}_{ss}}, \Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}}, \Theta_{\mathcal{B}_s}, \Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}}, \Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}}, \Theta_{\mathcal{B}_\theta}, \Theta_{\mathcal{C}_s}, \Theta_{\mathcal{C}_\theta}, \Theta_{\mathcal{D}})$ は $\Theta_{\mathcal{Y}_s} \in \mathbf{R}^{n_s \times n_s}$, $\Theta_{\mathcal{Y}_\theta} \in \mathbf{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\Theta_{\mathcal{A}_{ss}} \in \mathbf{R}^{n_s \times n_s}$, $\Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}} \in \mathbf{R}^{n_s \times n_\theta}$, $\Theta_{\mathcal{B}_s} \in \mathbf{R}^{n_s \times m_1}$, $\Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}} \in \mathbf{R}^{n_\theta \times n_s}$, $\Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}} \in \mathbf{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\Theta_{\mathcal{B}_\theta} \in \mathbf{R}^{n_\theta \times m_1}$, $\Theta_{\mathcal{C}_s} \in \mathbf{R}^{p_1 \times n_s}$, $\Theta_{\mathcal{C}_\theta} \in \mathbf{R}^{p_1 \times n_\theta}$, $\Theta_{\mathcal{D}} \in \mathbf{R}^{p_1 \times m_1}$ に関して affine である．

(b) 任意の適当なサイズの行フルランクな行列 $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_\theta$ に対して，

$$\begin{aligned} & \Phi(\Theta_{\mathcal{Y}_s}, \Theta_{\mathcal{Y}_\theta}, \Theta_{\mathcal{A}_{ss}}, \Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}}, \Theta_{\mathcal{B}_s}, \Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}}, \Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}}, \Theta_{\mathcal{B}_\theta}, \Theta_{\mathcal{C}_s}, \Theta_{\mathcal{C}_\theta}, \Theta_{\mathcal{D}}) < 0 \\ \Rightarrow \quad & \Phi(\mathcal{T}_s\Theta_{\mathcal{Y}_s}\mathcal{T}_s^T, \mathcal{T}_\theta\Theta_{\mathcal{Y}_\theta}\mathcal{T}_\theta^T, \mathcal{T}_s\Theta_{\mathcal{A}_{ss}}\mathcal{T}_s^T, \mathcal{T}_s\Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}}\mathcal{T}_\theta^T, \mathcal{T}_s\Theta_{\mathcal{B}_s}, \\ & \qquad \mathcal{T}_\theta\Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}}\mathcal{T}_s^T, \mathcal{T}_\theta\Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}}\mathcal{T}_\theta^T, \mathcal{T}_\theta\Theta_{\mathcal{B}_\theta}, \Theta_{\mathcal{C}_s}, \Theta_{\mathcal{C}_\theta}, \Theta_{\mathcal{D}}) < 0. \end{aligned} \tag{7.50}$$

(c) (7.49) 式 を満足する $\mathcal{Y}_s > 0, \mathcal{Y}_\theta > 0, \mathcal{A}_{ss}, \mathcal{A}_{s\theta}, \mathcal{B}_s, \mathcal{A}_{\theta s}, \mathcal{A}_{\theta\theta}, \mathcal{B}_\theta, \mathcal{C}_s, \mathcal{C}_\theta, \mathcal{D}$ と，

$$\Phi(Y_{s_0}, Y_{\theta_0}, Y_{s_0}A_{ss_0}, Y_{s_0}A_{s\theta_0}, 0_{n_{s_0}\times m_1}, Y_{\theta_0}A_{\theta s_0}, Y_{\theta_0}A_{\theta\theta_0}, 0_{n_{\theta_0}\times m_1}, 0_{p_1\times n_{s_0}}, 0_{p_1\times n_{\theta_0}}, 0_{p_1\times m_1}) < 0 \tag{7.51}$$

を満足する正定行列 $Y_{s_0} \in \mathbf{R}^{n_{s_0}\times n_{s_0}}$, $Y_{\theta_0} \in \mathbf{R}^{n_{\theta_0}\times n_{\theta_0}}$, と行列 $A_{ss_0} \in \mathbf{R}^{n_{s_0}\times n_{s_0}}$, $A_{s\theta_0} \in \mathbf{R}^{n_{s_0}\times n_{\theta_0}}$, $A_{\theta s_0} \in \mathbf{R}^{n_{\theta_0}\times n_{s_0}}$, $A_{\theta\theta_0} \in \mathbf{R}^{n_{\theta_0}\times n_{\theta_0}}$, および適当なサイズの任意の行列 $\mathcal{A}_{ss_{12}}$, $\mathcal{A}_{s\theta_{12}}$, $\mathcal{A}_{\theta s_{12}}$, $\mathcal{A}_{\theta\theta_{12}}$, $\mathcal{A}_{s_{12}}$, $\mathcal{C}_{s_2}$, $\mathcal{C}_{\theta_2}$, に対して，十分大きな $\alpha > 0$ が存在して，

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_s & 0 \\ 0 & \alpha Y_{s_0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_\theta & 0 \\ 0 & \alpha Y_{\theta_0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_s\mathcal{A}_{ss} & \mathcal{Y}_s\mathcal{A}_{ss_{12}} \\ 0 & \alpha Y_{s_0}A_{ss_0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_s\mathcal{A}_{s\theta} & \mathcal{Y}_s\mathcal{A}_{s\theta_{12}} \\ 0 & \alpha Y_{s_0}A_{s\theta_0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_s\mathcal{B}_s \\ 0 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_\theta\mathcal{A}_{\theta s} & \mathcal{Y}_\theta\mathcal{A}_{\theta s_{12}} \\ 0 & \alpha Y_{\theta_0}A_{\theta s_0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_\theta\mathcal{A}_{\theta\theta} & \mathcal{Y}_\theta\mathcal{A}_{\theta\theta_{12}} \\ 0 & \alpha Y_{\theta_0}A_{\theta\theta_0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_\theta\mathcal{B}_\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{C}_s & \mathcal{C}_{s_2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{C}_\theta & \mathcal{C}_{\theta_2} \end{bmatrix}, \mathcal{D} \right) < 0 \tag{7.52}$$

が成立する．

以上のもとで，つぎの問題を考える．

問題 **7.2** G は *(7.46)* 式 により与えられた一般化プラントであるとする．このとき，$G_{cl} \star K$ の状態空間実現 *(7.48)* 式 に対して *(7.49)* 式 の *LMI* を満足する $\mathcal{Y}_s > 0$, $\mathcal{Y}_\theta > 0$ が存在するような K を求めよ．ただし，G_{cl} は *(7.47)* 式 で与えられる．

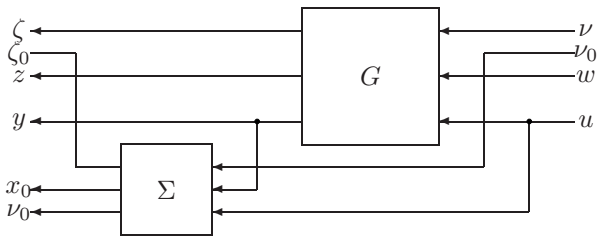


Fig. 7.11: Generalized Plant with Stable System

7.7.2 等価な問題

つぎの定理は，定理 7.1 をゲインスケジューリング手法を適用する場合に拡張したものである．

定理 7.2 *(7.46)* 式 で与えられた n_s 次の一般化プラント G に対して，ある安定な n_{s_0} 次のシステム Σ

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|ccc} A_{ss_0} & A_{s\theta_0} & B_{s_{0y}} & B_{s_{0u}} \\ \hline A_{\theta s_0} & A_{\theta\theta_0} & B_{\theta_{0y}} & B_{\theta_{0u}} \\ I_{n_{s_0}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_{\theta_0}} & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.53}$$

と正則な行列 S_s, S_θ および適当な行列 $A_{ss_{12}}$, $A_{s\theta_{12}}$, $A_{\theta s_{12}}$, $A_{\theta\theta_{12}}$, C_{1s_2}, $C_{1\theta_2}$, C_{2s_2}, $C_{2\theta_2}$, C_{3s_2}, $C_{3\theta_2}$, C_{4s_2}, $C_{4\theta_2}$ が存在して，*Fig. 7.11* のシステムの状態空間実現がつぎのように相似変換されると仮定する．

$$\left[\begin{array}{c|c|c:c} S_s^{-1}\begin{bmatrix} A_{ss} & 0 \\ B_{s_{0y}}C_{2s} & A_{ss_0}\end{bmatrix}S_s & S_s^{-1}\begin{bmatrix} A_{s\theta} & 0 \\ B_{s_{0y}}C_{2\theta} & A_{s\theta_0}\end{bmatrix}S_\theta & S_s^{-1}\begin{bmatrix} B_{1s} & B_{2s} \\ B_{s_{0y}}D_{21} & B_{s_{0u}}\end{bmatrix} \\ \hline S_\theta^{-1}\begin{bmatrix} A_{\theta s} & 0 \\ B_{\theta_{0y}}C_{2s} & A_{\theta s_0}\end{bmatrix}S_s & S_\theta^{-1}\begin{bmatrix} A_{\theta\theta} & 0 \\ B_{\theta_{0y}}C_{2\theta} & A_{\theta\theta_0}\end{bmatrix}S_\theta & S_\theta^{-1}\begin{bmatrix} B_{1\theta} & B_{2\theta} \\ B_{\theta_{0y}}D_{21} & B_{\theta_{0u}}\end{bmatrix} \\ \hdashline \begin{bmatrix} C_{1s} & 0 \\ C_{2s} & 0 \\ 0 & I_{n_{s_0}} \\ 0 & 0\end{bmatrix}S_s & \begin{bmatrix} C_{1\theta} & 0 \\ C_{2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_{\theta_0}}\end{bmatrix}S_\theta & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \end{array}\right] \tag{7.54}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc:cc} A_{ss} & A_{ss_{12}} & A_{s\theta} & A_{s\theta_{12}} & B_{1s} & B_{2s} \\ 0 & A_{ss_0} & 0 & A_{s\theta_0} & 0 & 0 \\ \hline A_{\theta s} & A_{\theta s_{12}} & A_{\theta\theta} & A_{\theta\theta_{12}} & B_{1\theta} & B_{2\theta} \\ 0 & A_{\theta s_0} & 0 & A_{\theta\theta_0} & 0 & 0 \\ \hdashline C_{1s} & C_{1s_2} & C_{1\theta} & C_{1\theta_2} & D_{11} & D_{12} \\ C_{2s} & C_{2s_2} & C_{2\theta} & C_{2\theta_2} & D_{21} & 0 \\ J_s & C_{3s_2} & 0 & C_{3\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & C_{4s_2} & J_\theta & C_{4\theta_2} & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.55}$$

ただし，

$$J_s := \begin{bmatrix} 0 & I_{n_{s_0}} \end{bmatrix}, \quad J_\theta := \begin{bmatrix} 0 & I_{n_{\theta_0}} \end{bmatrix} \tag{7.56}$$

このとき，つぎの *2* つの条件は等価である．

(i) 問題 *7.2* の解 K が存在する．

(ii) $\hat{K}$ と $\mathcal{Y}_s > 0,\ \mathcal{Y}_\theta > 0$ が存在して，$\hat{G}_{cl} \star \hat{K}$ の状態空間実現が *(7.49)* 式 の設計仕様を満足する．
ただし $\hat{G}$ を，

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{cc:cc} A_{ss} & A_{s\theta} & B_{1s} & B_{2s} \\ \hline A_{\theta s} & A_{\theta\theta} & B_{1\theta} & B_{2\theta} \\ \hdashline C_{1s} & C_{1\theta} & D_{11} & D_{12} \\ C_{2s} & C_{2\theta} & D_{21} & 0 \\ J_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_\theta & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.57}$$

と与え，これを用いて $\hat{G}_{cl}$ をつぎのようにおく．

$$\hat{G}_{cl} = \left[\begin{array}{ccc:cc:cc} A_{ss} & A_{s\theta} & 0 & B_{1s} & 0 & B_{2s} \\ \hline A_{\theta s} & A_{\theta\theta} & 0 & B_{1\theta} & 0 & B_{2\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \hdashline C_{1s} & C_{1\theta} & 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ \hdashline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ C_{2s} & C_{2\theta} & 0 & D_{21} & 0 & 0 \\ J_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.58}$$

さらに *(ii)* の条件を満足する $\hat{K}$ が存在するとき，以下の K は *(i)* の条件を満足する．

$$K = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} \hat{A}_{K_{ss}} & \hat{B}_{K_{s x_0}} & \hat{A}_{K_{s\theta}} & \hat{B}_{K_{s\nu_0}} & \hat{B}_{K_{s y}} \\ B_{s_{0u}}\hat{C}_{K_s} & A_{ss_0} + B_{s_{0u}}\hat{D}_{K_{x_0}} & B_{s_{0u}}\hat{C}_{K_\theta} & A_{s\theta_0} & B_{s_{0y}} + B_{s_{0u}}\hat{D}_{K_y} \\ \hline \hat{A}_{K_{\theta s}} & \hat{B}_{K_{\theta x_0}} & \hat{A}_{K_{\theta\theta}} & \hat{B}_{K_{\theta\nu_0}} & \hat{B}_{K_{\theta y}} \\ B_{\theta_{0u}}\hat{C}_{K_s} & A_{\theta s_0} + B_{\theta_{0u}}\hat{D}_{K_{x_0}} & B_{\theta_{0u}}\hat{C}_{K_\theta} & A_{\theta\theta_0} & B_{\theta_{0y}} + B_{\theta_{0u}}\hat{D}_{K_y} \\ \hdashline \hat{C}_{K_s} & \hat{D}_{K_{x_0}} & \hat{C}_{K_\theta} & \hat{D}_{K_{\nu_0}} & \hat{D}_{K_y} \end{array}\right] \tag{7.59}$$

ただし，*Fig. 7.11* の y, x_0, ν_0 に対応させて $\hat{K}$ の状態空間実現をつぎのように表す．

$$\hat{K} = \left[\begin{array}{cc:ccc} \hat{A}_{K_{ss}} & \hat{A}_{K_{s\theta}} & \hat{B}_{K_{s y}} & \hat{B}_{K_{s x_0}} & \hat{B}_{K_{s\nu_0}} \\ \hline \hat{A}_{K_{\theta s}} & \hat{A}_{K_{\theta\theta}} & \hat{B}_{K_{\theta y}} & \hat{B}_{K_{\theta x_0}} & \hat{B}_{K_{\theta\nu_0}} \\ \hdashline \hat{C}_{K_s} & \hat{C}_{K_\theta} & \hat{D}_{K_y} & \hat{D}_{K_{x_0}} & \hat{D}_{K_{\nu_0}} \end{array}\right] \tag{7.60}$$

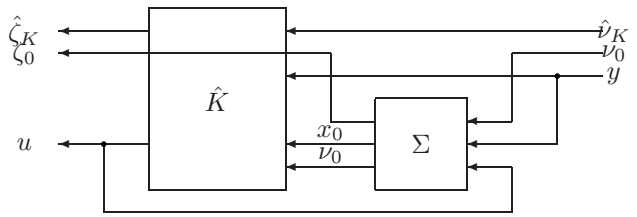


Fig. 7.12: Structure of Controller

証明 繁雑だが B.1 と同様の手順で証明できる．□

定理 7.2 は，一般化プラントの状態およびパラメータの出力の一部をある安定なシステムを用いて生成できるならば，補償器の設計問題は，状態とパラメータの出力の一部が観測出力に含まれるとした場合の補償器の設計問題と等価であることを示している．

(7.57) 式 は，G の n_s 個の状態と n_θ 個のパラメータの出力うち，n_{s_0} 個の状態と n_{θ_0} 個のパラメータの出力を観測できるように変更したシステムである．よって，(ii) の設計問題に対して 付録 B.3 定理 B.2 を用いれば，$n_\theta - n_{\theta_0}$ 個のスケジューリングパラメータを持つ $n_s - n_{s_0}$ 次の $\hat{K}$ を得ることができる．Σ が n_{θ_0} 個のパラメータを持つ n_{s_0} 次のシステムであることから，最終的な補償器 (7.59) 式 はフルオーダの設計を行う場合と同様に，n_θ 個のパラメータを持つ n_s 次のシステムとなる．

(7.60) 式 の補償器の状態空間実現が Fig. 7.12 のシステムの状態空間実現に等しいことは容易に確認できる．

7.7.3 周期外乱抑制制御系設計への応用

第 8 章 第 8.4.2 節 で示すように，スケジューリングパラメータが $\mathbf{BH}_\infty$ の要素である場合には，Fig. 7.9 の閉ループ系が内部安定で，かつ，w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを小さくするような K の設計を，(a), (b), (c) の公理を満たす Φ を用いて行うことが可能である．また，θ をむだ時間要素として，Fig. 6.8 の閉ループ系を Fig. 7.9 の形に書き直すと，G を

$$G = \left[\begin{array}{ccc|c:cc:c} A_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_P \\ B_S C_P & A_S & 0 & 0 & B_S & B_S & 0 \\ B_F D_S C_P & B_F C_S & A_F & B_F & B_F D_S & B_F D_S & 0 \\ \hline D_F D_S C_P & D_F C_S & C_F & D_F & D_F D_S & D_F D_S & 0 \\ \hdashline C_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_T \\ D_S C_P & C_S & 0 & I & D_S & D_S & 0 \\ \hdashline C_P & 0 & 0 & 0 & I & I & 0 \end{array}\right] \tag{7.61}$$

と書くことができ，

$$\begin{bmatrix} A_{ss_0} & A_{s\theta_0} & B_{s_{0y}} & B_{s_{0u}} \\ A_{\theta s_0} & A_{\theta\theta_0} & B_{\theta_{0y}} & B_{\theta_{0u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_S & 0 & 0 & B_S & 0 \\ B_F C_S & A_F & B_F & B_F D_S & 0 \\ D_F C_S & C_F & D_F & D_F D_S & 0 \end{bmatrix} \tag{7.62}$$

$$S_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ J_s & I \end{bmatrix}, \quad S_\theta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ J_\theta & I \end{bmatrix}, \quad A_{\cdot\cdot_{12}} = 0,\ C_{1\cdot_2} = 0,\ C_{2\cdot_2} = 0,\ C_{3\cdot_2} = 0,\ C_{4s_2} = 0,\ C_{4\theta_2} = I \tag{7.63}$$

とおくと 定理 7.2 の仮定が成立する．よって，むだ時間要素を含む重み関数に基づく周期外乱抑制制御系の設計問題に対して，定理 7.2 を用いて構造を持つ補償器の設計を行うことができ，むだ時間要素を含む重みを持つ補償器を得ることができる．よって，第 6 章 第 6.5 節 の方法で補償器の設計を行う場合に比べて，設計時・実装時の計算量を低減させることができる．

7.8　結言

多目的制御系設計問題において，一般化プラントの状態の一部がある安定なシステムを用いて生成できる場合に，そのシステムを陽に持つ補償器の設計法を提案した．そのような安定なシステムが存在する特別な場合として，重み付けされた制御入力および観測出力を評価する場合や，入力むだ時間が存在する場合が含まれる．提案手法を用いることにより，LMI を用いて一般的な設計仕様を考慮しかつ一般化プラントの状態を生成するシステムを陽に持つ補償器を得ることができる．また，この補償器の構造を利用することにより，補償器設計時および実装時の計算量が低減されることを示した．このことから，より現実に近い複雑な設計仕様を盛り込んだ補償器の設計・実装が可能となる．さらに，離散時間入力むだ時間系の場合にシミュレーションを行い，提案手法を用いると実際に制御則の計算時間を短縮できることを確認した．

定理 7.1 の結果の双対も同様に成立する．この結果を用いれば，出力むだ時間が存在する離散時間の一般化プラントや，重みづけされた外生入力が制御入力に加わる場合にも，提案手法を用いて構造を持つ補償器の設計を行うことができる．

また，一般化プラントがパラメータに依存する場合にも同様の結果が成立し，一般化プラントの状態とパラメータの出力の一部がある安定なシステムを用いて生成できる場合に，そのシステムを陽に持つ補償器の設計法を示した．この方法を適用することにより，第 6 章 第 6.5 節 で提案した，むだ時間要素を含む重み関数に基づく周期外乱抑制制御系の設計問題に対して，むだ時間要素を含む重み関数を陽に持つ補償器を設計することができることを示した．さらに，第 3 章 で提案したような，パラメータ推定値をスケジューリングパラメータとするゲインスケジューリング補償器の構造を用いる場合にも，本章の結果を用いて構造を持つ補償器の設計を行うことができる．ただしその際，第 3 章 と同様に，設計問題は非線形拘束条件付きの LMI で記述されるため，凸計画問題に帰着することはできない．しかしながら，文献 [43] の結果を用いれば，大域的最適化を行い補償器を得ることができる．

第8章　有限次元近似とゲインスケジューリングに基づくむだ時間系に対する補償器の設計

第 6 章 では，周期外乱を抑制する制御系を設計する際の保守性を低減させるために，むだ時間要素をスケジューリングパラメータとするゲインスケジューリング補償器の構造を用いた．しかし，そこではむだ時間要素に対するスモールゲイン条件を用いて補償器の設計を行っており，設計問題は外乱の周期に依存していない．よって，補償器の設計時・実装時を通じて外乱の周期が一定かつ既知である場合には保守的な設計となる．

そこで本章では，むだ時間を含む制御系を設計する際の保守性をさらに低減させるために，むだ時間要素の有限次元近似を行い，かつ，その近似誤差に対するゲインスケジューリングを行うことを考える．具体的には，むだ時間要素の入力が観測出力として利用可能で，かつ，むだ時間要素の有限次元近似モデルが近似誤差の LFT として与えられた場合に，むだ時間要素と有限次元システムから構成される実装可能な補償器の設計法を提案している．そのためにまず，(1) 与えられた問題を，近似誤差の出力が観測出力として利用可能であるとした，等価な問題に帰着できることを示し，さらに，(2) 導出された等価な問題に対して，近似誤差に対するゲインスケジューリングによって補償器を設計する場合，近似誤差をパラメータとして持たない補償器が設計可能であることを示す．

本章では本質的には，第 7 章 の結果— 観測出力に安定なシステムが接続された一般化プラントに対して，その安定なシステムを陽に持つ補償器を設計することができる — と同じ結果を与えている．ただし，本章では，連続時間のむだ時間要素を扱うため，第 7 章 のような状態空間での議論を行うことができないことを注意しておく．

8.1　緒言

むだ時間を含む制御系を設計する場合，そのむだ時間要素に対してスモールゲイン条件を適用すれば，容易に補償器を設計することが可能である (たとえば [8]) . しかしながら，この方法では，むだ時間要素の位相特性が無視されているために，そのときの設計は保守的なものとなる．たとえば，繰返し制御系においてむだ時間要素をボール集合の要素と捉えて設計した場合，むだ時間要素を 1 におきかえても外乱抑制性能の定常特性は変わらないことが指摘されている [8, 44] . この場合，定常特性に注目する限り，むだ時間要素を補償器内部に含める利点はない．

これに対して，文献 [34] の数値例では，むだ時間を有限次元近似し，さらにその近似誤差をゲインスケジューリングすることによって，$\mathcal{H}_\infty$ 予見制御系設計における保守性を低減させている．しかしなが

ら，この手法を用いると，むだ時間の近似の方法によっては補償器の実装が困難となる.

そこで本章では，むだ時間の有限次元近似誤差をゲインスケジューリングし，なおかつ容易に実装可能な補償器の設計法を提案する．

本章の構成はつぎの通りである．まず 第 8.2 節 で，従来の方法で設計された補償器を実装する際の問題点を指摘する．つぎに 第 8.3 節 で，あるクラスのむだ時間系に対する補償器の設計問題を設定し，この問題に対して，第 8.4 節で，容易に実装可能な補償器の設計法を与える．

8.2　むだ時間を用いた制御系設計

入力端にむだ時間が存在する場合をはじめとして，むだ時間が関与する制御対象は現実に多数存在し，そのようなシステムに対する $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題も取り扱われている [45]．

このようなむだ時間を含む $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に対して，容易に補償器設計を行うための一つの方法は，むだ時間要素を不確かさとみなして μ 設計を行うことである．しかしながら，このような設計は，1) 設計問題がむだ時間 L に依存していない，2) 制御対象が無限次元系であるにもかかわらず有限次元の補償器しか得られない，という 2 点において保守的な設計となっている．これらの問題点を解決するために，1) むだ時間要素を有限次元近似すれば，設計問題がむだ時間 L に依存するようになり，2) その近似誤差をスケジューリングパラメータとみなしたゲインスケジューリングを行えば，無限次元の補償器を得ることができるため，より保守性の低い設計が可能となる [34]．

このようにできる限り保守性の低い設計を行うために，むだ時間要素を有限次元近似し，その近似誤差に対するゲインスケジューリングを行った場合，スケジューリングパラメータとなる近似誤差に依存した補償器が得られるため，補償器を実装する場合には，近似誤差も実装しなければならない．しかしながら，むだ時間要素が無限次元系であることから，その近似誤差も一般に無限次元系となり，その実装は困難なものとなる．

例 **8.1** 文献 *[34]* の数値例と同様に，むだ時間要素 e^{-sL} をつぎのように n 次遅れ系で近似する．

$$e^{-sL} = m(s) + w(s)\delta(s) \tag{8.1}$$

$$m(s) = \frac{1}{(1+sL/n)^n}, \quad w(s) = \frac{ks^2}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{8.2}$$

$$n = 3,\ L = 1,\ a_0 = 6.91,\ a_1 = 4.10,\ k = 1.17$$

ここで $m(s)$ が n 次遅れ系のノミナルモデル，$w(s)$ は重み関数であり，$\delta(s)$ は近似誤差で $\mathbf{BH}_\infty$ の要素である．実際に，*(8.1)* 式 から $\delta(s)$ を逆算すると，

$$\delta(s) = \frac{\Delta(s)}{w(s)}, \quad \Delta(s) := e^{-sL} - m(s) \tag{8.3}$$

となる．以下，$\delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty$ を示す．まず，$\delta(s)$ は C_+ で正則で, さらに, 原点を除く $\bar{C}_+$ で有界となる．原点における特異点は除去可能であることから，この特異点を実際に除去すると[1]，$\delta(s)$ はつぎの

[1] $e^{-sL} = 1/e^{sL}$ を無限級数展開し (8.3) 式 の分母・分子の s^2 をはらう

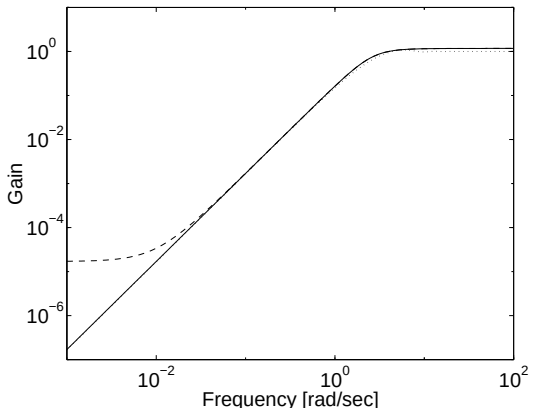


Fig. 8.1: Gain of Weighting Function

ように書ける．

$$\delta(s) = \frac{\Delta_0(s)}{w_0(s)}, \quad w_0(s) := \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{8.4}$$

$$\Delta_0(s) := \frac{L^2 e^{-sL} \left\{ \sum_{k=2}^{n} {}_nC_k \frac{(sL)^{k-2}}{n^k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(sL)^{k-2}}{k!} \right\}}{\left(1 + \frac{sL}{n}\right)^n} \tag{8.5}$$

すると，

$$\delta(0) = \frac{a_0}{k}\Delta_0(0) = \frac{a_0}{k}\left(-\frac{1}{6}\right) \tag{8.6}$$

となり，$\delta(0)$ が有界となることから，$\delta(s) \in \mathbf{H}_\infty$ であることがわかる．ただし，

$$\Delta_0(0) = L^2\left(\frac{{}_nC_2}{n^2} - \frac{1}{2}\right). \tag{8.7}$$

つぎに，$\delta(s)$ の虚軸上におけるゲインを考える．まず，*(8.6)* 式 より $|\delta(0)| = 0.981 < 1$. また，*Fig. 8.1* に $\Delta(s)$ と $w(s)$ のゲインをそれぞれ点線，実線で示す．実線が点線を上から覆っていることから，$\delta(s)$ の虚軸上におけるゲインは 1 以下となる．以上より，$\delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty$ であることがわかる．

この $\delta(s)$ は，*(8.3)* 式 のように，むだ時間要素と有限次元システム $m(s), w(s)$ を用いて構成することができる．ところが，このシステムは原点で極零相殺をおこすため，このシステムを含む閉ループ系を内部安定化することはできない．一方，原点における極零相殺を除去した *(8.4)* 式, *(8.5)* 式 の $\delta(s)$ の場合，第 *1* 項は有限次元システムとむだ時間要素から構成できるが，第 *2* 項は複雑な無限次元系となるため，このシステムを実装するのは困難である．一方，このような困難を避けるために，$\delta(s)$ が実装可能となるように近似を変更する方法も考えられる．例えば，小さな正数 β を用いて $w(s)$ をつぎのように変更すれば，$\delta(s)$ は不安定な極零相殺を起こさず，むだ時間要素と有限次元システムを用いて実装することができるようになる．

$$w(s) = \frac{k(s+\beta)^2}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

しかしながら，このように変更を施すと，補償器の設計はより保守的となる．*Fig. 8.1* の破線に，$\beta = 0.01$ のときの $w(s)$ のゲインを示す．低周波域において，$\Delta(s)$ のゲインをタイトに覆えていないことがわかる．β をさらに小さく設定することによって，この保守性を低減することはできるが，しかしながら，$\beta = 0$ でない限り，この保守性を取り除くことはできない．

以上の例で示されるように，設計の保守性を低減するために，むだ時間要素を有限次元近似して，その近似誤差をゲインスケジューリングした場合，補償器の実装が困難になることがある．ただし，この問題は文献 [34] では触れられていない．また，近似誤差が実装可能となるように近似を変更すると，本来不要な保守性を補償器の設計に付加することとなる．そこで本章では，入力端にむだ時間を持つ場合を一般化した設計問題に対し，その構造を考慮することによって，むだ時間要素の有限次元近似誤差に対するゲインスケジューリングを行った場合にも，むだ時間要素と有限次元システムを用いて構成することができ，かつ，内部安定性が保証されるような補償器が得られることを示す．

8.3　問題設定

制御入力にむだ時間が存在する場合，そのむだ時間要素に対する入力は制御入力そのものであるので，それを直接観測することが可能である．そこでここでは，制御入力にむだ時間が存在するような系を一般化し，むだ時間が関与する $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題において，むだ時間要素の入力信号を直接観測することが可能な場合を考える．

また本章では，できる限り保守性の低い設計を行うために，むだ時間要素の有限次元近似を用いる．その際，前節 (8.1) 式 の近似を一般化し，むだ時間要素 e^{-sL} がつぎのような LFT を用いて与えられた場合を考える．

$$e^{-sL} = \delta(s) \star M_s(s) \tag{8.8}$$

ただし，$M_s(s) \in \mathbf{RH}_\infty{}^{2\times 2}$，$\delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty$ であり，(8.8) 式 の LFT は内部安定であるとする．また，(8.8) 式 の伝達関数はスカラなので，一般性を失うことなく $M_s(s)$ を

$$M_s(s) = \begin{bmatrix} m_{11}(s) & m_{12}(s) \\ 1 & m_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{8.9}$$

と仮定する．むだ時間を含む系を有限次元系で近似するいくつかの例は知られているが (例えば [46]), むだ時間要素 e^{-sL} を (8.8) 式 の LFT 形式で表すための系統的な方法は知られていない．本章では第 8.5 節 において, $M_s(s)$ を設定するための一つの方法を示す．(8.1) 式 の近似の場合には，$m_{11}(s) = 0, m_{12}(s) = w(s), m_{22}(s) = m(s)$ と設定することによって，(8.9) 式 より (8.8) 式 の $M_s(s)$ を与えることができる．(8.8) 式 のむだ時間要素はスカラ伝達関数であるが，以降では，より一般的に，むだ時間要素の repeated scalar を扱うこととし，(8.8) 式 を用いて，$e^{-sL}I_{n_\theta}$ を

$$e^{-sL}I_{n_\theta} = \delta(s)I_{n_\theta} \star M(s) \tag{8.10}$$

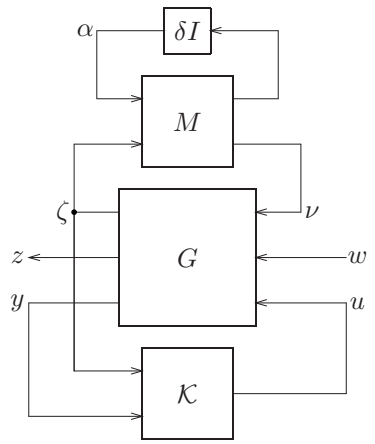


Fig. 8.2: Finite Dimensional Approximation of Delay

と表す．ただし n_θ は repeated scalar の次数で，

$$M(s) = \begin{bmatrix} m_{11}(s)I_{n_\theta} & m_{12}(s)I_{n_\theta} \\ I_{n_\theta} & m_{22}(s)I_{n_\theta} \end{bmatrix} \in \mathbf{RH}_\infty{}^{2n_\theta \times 2n_\theta} \tag{8.11}$$

である．

以上の仮定のもとで，本章では以下の問題を考える．

問題 **8.1** 一般化プラント $G(s)$ と，$M(s)$，$\delta(s)$ が与えられているとする．このとき，*Fig. 8.2* の閉ループ系を内部安定化し，かつ，w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを γ 未満とする補償器 $\mathcal{K}(s)$ を求めよ．

制御入力にむだ時間が存在するような場合は，問題 8.1 の特別な場合となる．このとき，制御入力 u とむだ時間要素の入力 ζ は同一であるから，一般化プラント $G(s)$ において，u から ζ までの伝達関数は I となる．

本章では，この問題に対する補償器を得るために $\delta(s)$ に対するゲインスケジューリングを行う．その際，むだ時間要素は無限次元系であるので，前節の例のように $\delta(s)$ も無限次元系となり，その実装は一般に困難である．これに対し本章では，$\delta(s)$ に対するゲインスケジューリングを行うにもかかわらず，むだ時間と有限次元システムを用いて実装が可能な補償器を得ることができる手法を与える．

8.4 主要な結果

本節では，問題 8.1 によって与えられる設計問題に対して，仕様を満足し，かつ実装が可能な補償器を設計する手法を与える．このために，まず，問題 8.1 を等価な問題に帰着し，さらに，帰着された問題に対してゲインスケジューリングを行うことによって補償器を設計することを考える．

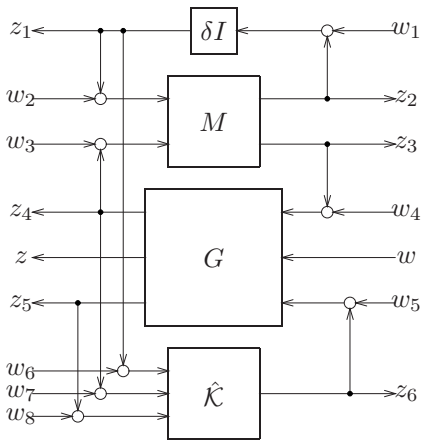


Fig. 8.3: Equivalent Closed-loop System

8.4.1　等価な問題

ここではまず，問題 8.1 と可解条件の意味で等価な設計問題を導出する．

定理 8.1 むだ時間要素 e^{-sL} が *(8.10)* 式 によって与えられたものとする．このとき，与えられた一般化プラント $G(s)$ に対して以下の条件は等価である．

(i) *Fig. 8.2* の閉ループ系を内部安定化し，かつ w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを γ 未満とする補償器 $\mathcal{K}(s)$ が存在する．

(ii) *Fig. 8.3* の閉ループ系を内部安定化し，かつ w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを γ 未満とする補償器 $\hat{\mathcal{K}}(s)$ が存在する．

さらに，*(ii)* の条件を満足する $\hat{\mathcal{K}}(s)$ が存在するとき，以下の $\mathcal{K}(s)$ は *(i)* の条件を満足する．

$$\mathcal{K}(s) = \left[\hat{\mathcal{K}}_\alpha(s)(e^{-sL} - m_{22}(s))I_{n_\theta} + \hat{\mathcal{K}}_\zeta(s) \quad \hat{\mathcal{K}}_y(s) \right] \tag{8.12}$$

ただし，

$$\hat{\mathcal{K}}(s) = \left[\hat{\mathcal{K}}_\alpha(s) \quad \hat{\mathcal{K}}_\zeta(s) \quad \hat{\mathcal{K}}_y(s) \right]. \tag{8.13}$$

証明 ここでは，表記を簡単にするため，伝達関数の引数 (s) を一部省略する.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : (i) の条件を満足する $\mathcal{K}(s)$ が存在すると仮定し，Fig. 8.2 の観測出力に対応して $\mathcal{K}(s)$ をつぎのように分割する．

$$\mathcal{K}(s) = \left[\mathcal{K}_\zeta(s) \quad \mathcal{K}_y(s) \right] \tag{8.14}$$

このとき，以下の $\hat{\mathcal{K}}(s)$ は明らかに (ii) の条件を満足する補償器となる．

$$\hat{\mathcal{K}}(s) = \left[0 \quad \mathcal{K}_\zeta(s) \quad \mathcal{K}_y(s) \right] \tag{8.15}$$

(ii) ⇒ (i) : Fig. 8.3 の閉ループ系において，
$\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} w_1^T & w_2^T & w_3^T & w_4^T & w^T & w_5^T & w_6^T & w_7^T & w_8^T \end{array}\right]^T$ から $\left[\begin{array}{ccc:ccc:c} z_1^T & z_2^T & z_3^T & z_4^T & z^T & z_5^T & z_6^T \end{array}\right]^T$ までの伝達関数は，$D(s)^{-1}N(s)$

$$D(s) = \left[\begin{array}{cc:c:c} I & -\delta\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ -M\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & I & -M\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ \hdashline 0 & -G\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & I & -G\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \hdashline -\hat{\mathcal{K}}\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & -\hat{\mathcal{K}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} & I \end{array}\right]$$

$$N(s) = \mathrm{diag}(\delta, M, G, \hat{\mathcal{K}})$$

と書ける．いま，仮定より，条件 (ii) が成立することから，$D(s)^{-1}N(s) \in \mathbf{H}_\infty$ が成立する．ここで，

$$\Sigma(s) = \mathrm{diag}(-m_{22}(s)I_{n_p}, e^{-sL}I_{n_p}) \tag{8.16}$$

と定義すると，$\Sigma(s) \in \mathbf{H}_\infty$ であることから，$\Sigma(s)$ を用いて拡大した行列 $\hat{D}(s)^{-1}\hat{N}(s)$

$$\hat{D}(s) = \mathrm{diag}(D(s), I_{2n_p}), \quad \hat{N}(s) = \mathrm{diag}(N(s), \Sigma(s))$$

も $\mathbf{H}_\infty$ に属す．一方，Fig. 8.4 の閉ループ系において，$\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:cc} w_1^T & w_2^T & w_3^T & w_4^T & w^T & w_5^T & w_6^T & w_7^T & w_8^T & w_9^T & w_{10}^T \end{array}\right]^T$ から $\left[\begin{array}{ccc:ccc:c:cc} z_1^T & z_2^T & z_3^T & z_4^T & z^T & z_5^T & z_6^T & z_7^T & z_8^T \end{array}\right]^T$ までの伝達関数は，$\hat{D}(s), \hat{N}(s)$ を用いてつぎのように書ける．

$$(T(s)\hat{D}(s)U(s))^{-1}\hat{N}(s) = (T(s)\hat{D}(s)U(s))^{-1}T(s)\hat{N}(s)V(s) \tag{8.17}$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hat{\mathcal{K}}\Xi & 0 & I & -\hat{\mathcal{K}}\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad U(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -\Sigma\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$V(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -\Xi\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} & 0 & I & \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Sigma \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Xi(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -\delta\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \\ -M\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & I \end{bmatrix}^{-1}$$

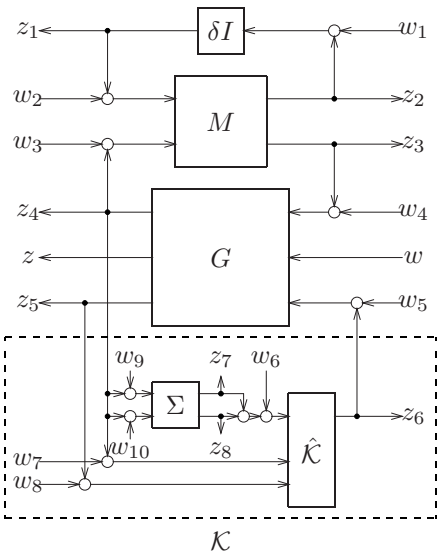


Fig. 8.4: Closed-loop System with Delay

ここで，

$$\delta(1 - m_{11}\delta)^{-1}m_{12} = e^{-sL} - m_{22}$$

より，

$$\Xi \begin{bmatrix} 0 \\ M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が成立することを用いた．

$T(s)$ が可逆であることと，$U(s), V(s)$ がユニモジュラであることから，(8.17) 式 の行列は $\mathbf{H}_\infty$ に属す．すなわち，Fig. 8.4 の閉ループ系は内部安定となる．ここで，点線で示したブロックは，簡単な計算により (8.12) 式 の伝達関数と入出力等価であることがわかるので，(8.12) 式 の $\mathcal{K}(s)$ に対して，Fig. 8.2 の閉ループ系は内部安定となる．

一方，Fig. 8.3, Fig. 8.4 において，$\begin{bmatrix} w_4^T & w^T & w_5^T \end{bmatrix}^T$ から $\begin{bmatrix} z_4^T & z^T & z_5^T \end{bmatrix}^T$ までの伝達関数は，

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix} D^{-1} N \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T$$

と書ける．よって，Fig. 8.3 の w から z までの伝達関数は，Fig. 8.4 の w から z までの伝達関数すなわち (8.12) 式 と Fig. 8.2 によって与えられる閉ループ系の w から z までの伝達関数と等しい．仮定より，Fig. 8.3 の伝達関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは γ 未満であるから，Fig. 8.2 の伝達関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムも γ 未満となる．以上のことから，(8.12) 式 の $\mathcal{K}(s)$ は (i) の条件を満足する補償器となる．

□

問題 8.1 を適用することにより，問題 8.1 を，$\delta(s)$ の出力が観測可能であると仮定した等価な問題に帰着することができる．実際に Fig. 8.3 に対する補償器 $\hat{\mathcal{K}}(s)$ が求まれば，Fig. 8.2 に対する補償器 $\mathcal{K}(s)$

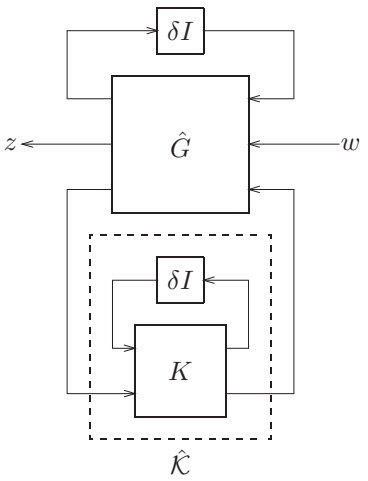


Fig. 8.5: Gain Scheduling

を, (8.12) 式 のようにむだ時間要素を用いて実装することができる．その際，近似誤差 $\delta(s)$ を実装する必要はない．さらに，$\delta(s)$ の出力が観測できるという性質を利用すると，次節で示すように，$\delta(s)$ に対するゲインスケジューリングを行って Fig. 8.3 の補償器 $\hat{\mathcal{K}}(s)$ を設計する場合でも，容易に実装が可能な補償器を得ることができる．

8.4.2 ゲインスケジューリング手法の適用

本節では，Fig. 8.3 に対する実装可能な補償器 $\hat{\mathcal{K}}(s)$ を設計するために，$\delta(s)$ に対するゲインスケジューリングを行う．その際，$\hat{\mathcal{K}}(s)$ を

$$\hat{\mathcal{K}}(s) = \delta(s) I_{n_k} \star K(s) \tag{8.18}$$

と仮定し，文献 [4] と同様に，プラントと補償器双方の $\delta(s)$ に対するスモールゲイン条件を利用することにより，Fig. 8.5 の閉ループ系を内部安定化し，かつ w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを γ 未満にする $K(s)$ を設計する問題を考える．ここで，n_k は $\hat{\mathcal{K}}(s)$ が用いる $\delta(s)$ の次数であり，$\hat{G}(s)$ は

$$\hat{G}(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} A_{ss} & A_{s\theta} & B_{1s} & B_{2s} \\ \hline A_{\theta s} & A_{\theta\theta} & B_{1\theta} & B_{2\theta} \\ C_{1s} & C_{1\theta} & D_{11} & D_{12} \\ \hat{C}_{2s} & \hat{C}_{2\theta} & \hat{D}_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{8.19}$$

と与えられる一般化プラントで n_θ 個のスケジューリングパラメータが接続されているものとする．また，一般性を失うことなく $D_{22} = 0$ を仮定する ($D_{22} \neq 0$ の場合は $D_{22} = 0$ の場合に帰着できる)．Fig. 8.3 の設計問題の場合には，$\delta(s)$ をスケジューリングパラメータとみなし，$\delta(s)$ と $\hat{\mathcal{K}}(s)$ を除いた残りの部分が $\hat{G}(s)$ に対応する．

Fig. 8.3 では，観測出力に $\delta(s)$ の出力が含まれている．一方，サーボ系の設計を行う場合には，観測出力に内部モデルを付加し，それによって拡大された一般化プラントに対して補償器の設計が行われる [47]．このとき，付加される内部モデルは実装される補償器の一部となるため，その状態を観測することは可能である．以上のような状況を考慮した設計を行うために，ここでは $\hat{C}_{2s}$，$\hat{C}_{2\theta}$，$\hat{D}_{21}$ が以下の構造を有すると仮定する．

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_{2s} & \hat{C}_{2\theta} & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{2s} & C_{2\theta} & D_{21} \\ J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_{s_0}} \end{bmatrix}, \quad J_\theta = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_{\theta_0}} \end{bmatrix} \tag{8.21}$$

(8.20) 式 は，n_{s_0} 個の状態変数と n_{θ_0} 個のスケジューリングパラメータの出力が観測出力に現われることを意味している．

与えられた (8.19) 式 の $\hat{G}(s)$ に対して，(8.18) 式 の $\hat{\mathcal{K}}(s)$ が，Fig. 8.5 の閉ループ系を内部安定化し，かつ w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを γ 未満とする補償器 ($\mathcal{H}_\infty$ 補償器) となるための十分条件は以下の補題によって与えられる [4]．

補題 8.1 与えられた補償器 $K(s)$ に対して，$G_{cl}(s)$ と $K(s)$ の閉ループ系が内部安定となり，かつ，ある正定行列 $D \in \mathbf{R}^{(n_\theta+n_k)\times(n_\theta+n_k)}$ が存在して

$$\left\| \begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} G_{cl} \star K \begin{bmatrix} D^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \tag{8.22}$$

が成り立つならば，*Fig. 8.5* の閉ループ系は，任意の $\delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty$ に対して内部安定で，w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは γ 未満となる．ただし $G_{cl}(s)$ をつぎのように与える．

$$G_{cl}(s) = \left[\begin{array}{c|cc:c:cc} A_{ss} & A_{s\theta} & 0 & B_{1s} & 0 & B_{2s} \\ \hline A_{\theta s} & A_{\theta\theta} & 0 & B_{1\theta} & 0 & B_{2\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \hdashline C_{1s} & C_{1\theta} & 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ \hdashline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ C_{2s} & C_{2\theta} & 0 & D_{21} & 0 & 0 \\ J_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{8.23}$$

補題 8.1 は，$\delta(s)$ に対するスモールゲイン条件に基づいているため，閉ループ系の内部安定性やロバスト性能条件が任意の $\delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty$ に対して保証される．一方，問題 8.1 の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題では，$\delta(s)$ は $\mathbf{BH}_\infty$ に属すある伝達関数によって与えられている．よって，補題 8.1 の条件は，問題 8.1 の設計問題に対しては保守的な結果を与える．しかし，以下に示すように，補題 8.1 の条件を用いれば，LMI を利用した設計が可能となり，効率的に計算可能な設計手法を得ることができる．

(8.22) 式 を満足する補償器の存在条件は LMI 問題となる [4] . また , ある補償器が存在すれば , $n_k = n_\theta$ 個のスケジューリングパラメータを用いる $K(s)$ が必ず存在する . しかし , $n_k < n_\theta$ となる補償器を求める問題は , 一般に非凸問題となり , その存在を確かめるためには多大な計算量を必要とする [48, 49] . これに対して 定理 B.2 を用いれば , (8.20) 式 の構造を考慮することにより , より少ない個数のスケジューリングパラメータをもつ補償器を LMI を用いて設計することができる . すなわち , $G_{cl}(s) \star K(s)$ の状態空間実現を

$$\left[\begin{array}{c|cc} \Theta_{\mathcal{A}_{ss}} & \Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}} & \Theta_{\mathcal{B}_s} \\ \hline \Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}} & \Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}} & \Theta_{\mathcal{B}_\theta} \\ \Theta_{\mathcal{C}_s} & \Theta_{\mathcal{C}_\theta} & \Theta_{\mathcal{D}} \end{array}\right] \tag{8.24}$$

とおき , スケーリング行列 D を $\Theta_{\mathcal{Y}_\theta}$ とおけば , 補題 8.1 の条件は , $\Phi(\cdot)$ をつぎのようにおいた場合の (B.16) 式 の LMI に帰着される .

$$\begin{aligned} &\Phi(\Theta_{\mathcal{Y}_s}, \Theta_{\mathcal{Y}_\theta}, \Theta_{\mathcal{A}_{ss}}, \Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}}, \Theta_{\mathcal{B}_s}, \Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}}, \Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}}, \Theta_{\mathcal{B}_\theta}, \Theta_{\mathcal{C}_s}, \Theta_{\mathcal{C}_\theta}, \Theta_{\mathcal{D}}) \\ &= \left[\begin{array}{cccccc} \Theta_{\mathcal{Y}_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{\mathcal{A}_{ss}} + \Theta_{\mathcal{A}_{ss}}^T & \Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}} & \Theta_{\mathcal{B}_s} & \Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}}^T & \Theta_{\mathcal{C}_s}^T \\ 0 & \Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}}^T & -\Theta_{\mathcal{Y}_\theta} & 0 & \Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}}^T & \Theta_{\mathcal{C}_\theta}^T \\ 0 & \Theta_{\mathcal{B}_s}^T & 0 & -\gamma I & \Theta_{\mathcal{B}_\theta}^T & \Theta_{\mathcal{D}}^T \\ 0 & \Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}} & \Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}} & \Theta_{\mathcal{B}_\theta} & -\Theta_{\mathcal{Y}_\theta} & 0 \\ 0 & \Theta_{\mathcal{C}_s} & \Theta_{\mathcal{C}_\theta} & \Theta_{\mathcal{D}} & 0 & -\gamma I \end{array}\right] \end{aligned} \tag{8.25}$$

さらに $\Phi(\cdot)$ が 第 7.7.1 節 の 3 つの公理を満たすことは容易に確認できる . また , (8.19) 式 および (8.20) 式 で与えられる $\hat{G}$ と (8.23) 式 で与えられる G_{cl} がそれぞれ (7.57) 式, (7.58) 式 に一致することから , 定理 B.2 を用いて補償器の設計を行うことが可能である .

定理 B.2 より , n_{s_0} 個の状態変数と n_{θ_0} 個のスケジューリングパラメータの出力が観測できる場合 , もし補償器が存在するならば , $n_\theta - n_{\theta_0}$ 個のスケジューリングパラメータをもつ $n_s - n_{s_0}$ 次の補償器が存在する . 実際に , (B.22) 式 の $K(s)$ はそのような補償器を与える . ただし , n_s は一般化プラントの次数である . 特に $n_{\theta_0} = n_\theta$ 個のスケジューリングパラメータの出力が観測できる場合には , スケジューリングパラメータを必要としない補償器が得られる . このとき , $G_{cl}(s)$ は $\hat{G}(s)$ と一致し , (8.22) 式 は定数 D スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に帰着される . よって , $n_{\theta_0} = n_\theta$ 個のスケジューリングパラメータの出力が観測できれば , 定数 D スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の可解条件は凸となる . また , さらに , 定数 D スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を解けば , ゲインスケジューリング補償器と同じ性能を得ることができる .

Fig. 8.3 の設計問題では , すべてのスケジューリングパラメータの出力が観測可能であるので , $n_{\theta_0} = n_\theta$ とできる . よって , Fig. 8.3 に対して , $n_k = 0$ となる (ゲインスケジューリング) 補償器 $\hat{\mathcal{K}}(s)$ が存在し , このとき $\hat{\mathcal{K}}(s)$ は $\delta(s)$ を含まない有限次元システムとなる . よって , 定理 8.1 より , $\mathcal{K}(s)$ を有限次元システム $\hat{\mathcal{K}}(s)$ とむだ時間要素を用いて (8.12) 式 のように構成すれば , 近似誤差 $\delta(s)$ を用いることなく , 補償器を実装することができる .

注意 **8.1** 定理 *8.1* は，問題 *8.1* を，$\delta(s)$ の出力が観測可能であるとした等価な問題に帰着できることを示している．同様に，$M(s)$ の全ての状態が観測可能であるとした等価な問題に帰着することができる．この場合，定理 *B.2* を適用することにより，$M(s)$ の次数分だけ低次の補償器を設計することができる．

注意 **8.2** 予見制御系設計問題 *[34, 50]* や周期外乱抑制制御系設計問題 *[36]* など，むだ時間要素を内部に持つ補償器の設計問題の場合には，むだ時間要素の出力を観測することが可能である．よってこの場合には，定理 *B.2* を用いることにより，むだ時間要素と有限次元システムを用いて実装可能な補償器を設計することができる．

8.5　むだ時間要素を LFT 表現するための一手法

第 8.3 節 で述べたように，むだ時間要素を (8.8) 式, (8.9) 式 の LFT 形式で表すための系統的な方法は知られていない. 本節では，適当な仮定のもとで，$M_s(s)$ を決定するための一つの手法を与える．

$m_{11}(s), m_{12}(s), m_{22}(s)$ をつぎのように仮定する．

$$m_{11}(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad m_{12}(s) = \frac{k s^2}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad m_{22}(s) = \frac{1}{(1 + sL/n)^n}$$

ここで $b_0 = b_1 = 0$ とすると，(8.8) 式, (8.9) 式 は (8.1) 式, (8.2) 式 に帰着される．$n \geq 2$ は与えられた整数で，また，一般性を失うことなく $k > 0$ を仮定する．いま，$m_{11}(s), m_{12}(s)$ の安定性より $a_0 > 0, a_1 > 0$ が成立しなくてはならない．さらに, (8.8) 式 の LFT が内部安定となるために，$m_{11}(s) \in \mathbf{BH}_\infty$ が成立しなくてはならない．この条件は，つぎの式が非負の実数解 X を持たないことと等価である．

$$X^2 + BX + C = 0 \tag{8.26}$$

ただし，$B := a_1^2 - 2a_0 - b_1^2, C := a_0^2 - b_0^2$. これはさらに，つぎの 2 つのいずれかが成立することと等価である．

$$D < 0 \tag{8.27}$$

$$D \geq 0 \text{ かつ } -B + \sqrt{D} < 0 \tag{8.28}$$

ただし，$D := B^2 - 4C$.

つぎに, $\delta(s) \in \mathbf{H}_\infty$ が成立するための条件を考える．(8.8) 式), (8.9) 式 を $\delta(s)$ について解くと，

$$\delta(s) = \frac{\Delta(s)}{m_{12}(s) + m_{11}(s)\Delta(s)}. \tag{8.29}$$

ただし $\Delta(s) := e^{-sL} - m_{22}(s)$. ここで, 原点における特異点を除去すると，

$$\delta(s) = \frac{\frac{\Delta_0(s)}{m_{120}(s)}}{1 + m_{11}(s)\frac{\Delta_0(s)}{m_{120}(s)}} \tag{8.30}$$

となる．ただし，$m_{120}(s) := k/(s^2 + a_1 s + a_0)$ で，$\Delta_0(s)$ は (8.5) 式 で与えられる．原点においてはつぎの値をとる．

$$\delta(0) = \frac{\frac{a_0}{k}\Delta_0(0)}{1 + \frac{b_0}{k}\Delta_0(0)} \tag{8.31}$$

ただし，$\Delta_0(0)$ は (8.7) 式 で与えられる．いま，例 8.1 (8.4) 式 の $\delta(s)$ が $\mathbf{H}_\infty$ に属すことと同様に，$\Delta_0(s)/m_{120}(s)$ も $\mathbf{H}_\infty$ に属すので，スモールゲイン定理より，つぎの条件が成立するならば，(8.30) 式 の $\delta(s)$ は $\mathbf{H}_\infty$ に属す.

$$\left| m_{11}(j\omega)\frac{\Delta_0(j\omega)}{m_{120}(j\omega)} \right| < 1 \quad {}^\forall\omega \tag{8.32}$$

これは (8.31) 式 より，つぎの 2 つの条件と等価である．

$$\left| m_{11}(j\omega)\frac{\Delta(j\omega)}{m_{12}(j\omega)} \right| < 1 \quad {}^\forall\omega \neq 0 \tag{8.33}$$

$$|b_0\Delta_0(0)| < k \tag{8.34}$$

$\delta(s) \in \mathbf{H}_\infty$ であるとき，$\delta(s) \in \mathbf{BH}_\infty$ であるための必要十分条件は (8.29) 式), (8.31) 式 より, つぎのように書ける．

$$|\Delta(j\omega)| \leq |m_{12}(j\omega) + m_{11}(j\omega)\Delta(j\omega)| \quad {}^\forall\omega \neq 0 \tag{8.35}$$

$$a_0|\Delta_0(0)| \leq |k + b_0\Delta_0(0)| \tag{8.36}$$

また，可能な限り小さな正数 $\alpha > 1$ を用いてつぎの条件が成立するように $m_{11}(s), m_{12}(s)$ を選ぶことにする．

$$|m_{12}(j\omega) + m_{11}(j\omega)\Delta(j\omega)| \leq \alpha|\Delta(j\omega)| \quad {}^\forall\omega \neq 0 \tag{8.37}$$

以上の条件を満足する係数 k, a_0, a_1, b_0, b_1 を決定するための方法を以下に示す．ただし，(8.33) 式, (8.35) 式, (8.37) 式 の不等式条件のチェックは，あらかじめ適当に選んだ有限個の $\omega = \omega_i (i = 1, 2, \cdots)$ において行うこととする．また，その際，ω_i 以外の ω で条件が成立しなくなることを防ぐために，(8.33) 式, (8.35) 式 の左辺に 1 よりわずかに大きい係数をかける．

8.5.1 乱数を用いた探索

上述の条件が同時に成立するような係数 k, a_0, a_1, b_0, b_1 を求めるための一般的な方法はない．ここでは，乱数を用いて係数を探索することとし，つぎの手順を考える．

1. 乱数を用いて $k > 0, a_0 > 0, a_1 > 0, b_0, b_1$ を設定する．

2. (8.34) 式),(8.36) 式 が成立するならつぎへ．そうでないなら 1 へ．

3. (8.27) 式),(8.28) 式 のいずれかが成立するならつぎへ．そうでないなら 1 へ．

4. (8.33) 式),(8.35) 式 がすべての $\omega = \omega_i$ で成立するならつぎへ．そうでないなら 1 へ．

5. つぎの式を用いて正数 α を求め, $\alpha - 1$ が十分小さいなら終了．そうでないなら 1 へ.

$$\alpha = \max_i \frac{|m_{12}(j\omega_i) + m_{11}(j\omega_i)\Delta(j\omega_i)|}{|\Delta(j\omega_i)|} \tag{8.38}$$

8.5.2　LMI を用いた探索

乱数探索は一般に膨大な計算量を必要とする．一方，$b_0 = b_1 = 0$ と仮定する場合には，LMI を用いて容易に係数を求めることができる．この場合 $m_{11}(s) = 0$ より (8.8) 式 の LFT は自動的に内部安定となる．

k, a_0, a_1 を用いて (8.35) 式), (8.37) 式 を書きくだすと,

$$\frac{k^2}{\alpha^2}\Omega \le (a_0 - \omega_i^2)^2 + a_1^2\omega_i^2 \le k^2\Omega \quad {}^\forall i. \tag{8.39}$$

ただし $\Omega := \omega_i^4/|\Delta(j\omega_i)|^2$. ここで $\hat{k} := k^2, \hat{\alpha} := k^2(1 - 1/\alpha^2), \hat{a}_1 := a_1^2$ とおくと,

$$(\hat{k} - \hat{\alpha})\Omega \le (a_0 - \omega_i^2)^2 + \hat{a}_1\omega_i^2 \le \hat{k}\Omega \quad {}^\forall i \tag{8.40}$$

を得る．ただし $\alpha > 1$ より $0 < \hat{\alpha} < \hat{k}$ である．また，α を最小化することは $\hat{\alpha}$ を最小化することと等価となる．一方，(8.36) 式 はつぎと等価．

$$(a_0\Delta_0(0))^2 \le \hat{k} \tag{8.41}$$

(8.40) 式), (8.41) 式 の条件は, a_0 を固定すれば, $\hat{k}, \hat{a}_1, \hat{\alpha}$ を変数とする LMI となっている．よって，a_0 に関する一次元探索を行うことにより，比較的容易に係数 k, a_1 を決定することが可能である．

8.6　数値例

本節では，Fig. 8.6 の入力むだ時間を持つプラントに対する感度最小化問題を考え，むだ時間要素の有限次元近似次の次数を高めると実際に設計の保守性が低減されることなどを示す．

$W_S(s), P(s), L$ をつぎのように与える．

$$W_S(s) = \frac{0.01}{s + 0.01}, \quad P(s) = \frac{1}{s(s - 0.5)}, \quad L = 1$$

むだ時間要素 e^{-sL} の有限次元近似は 第 8.5 節 に従って行う．ω_i は $[10^{-1}, 10^2]$ の範囲を対数目盛で均等に 30 点選び，(8.33) 式), (8.35) 式 の左辺にかける係数を 1.02 とした．まず，近似次数 $n = 3, 6$ の場合について, 第 8.5.2 節 の方法で係数を決定した．さらに比較のため，$n = 3$ の場合については 第 8.5.1 節 の方法でも係数を求めた．結果を Table. 8.1 に示す. $n = 3$ の 2 つの結果 (case 1, 2) を比較すると，b_0, b_1 を非零に選んだ場合の方が，α の値が 1 により近いことから，よりタイトに近似できていることがわかる．実際に $|m_{12}(j\omega) + m_{11}(j\omega)\Delta(j\omega)|$ をプロットした結果を Fig. 8.7 の実線 (case 2) と破線

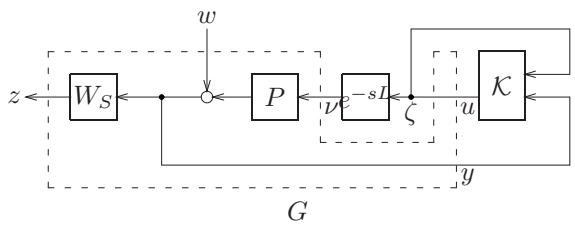


Fig. 8.6: Control System of Plant with Input Delay

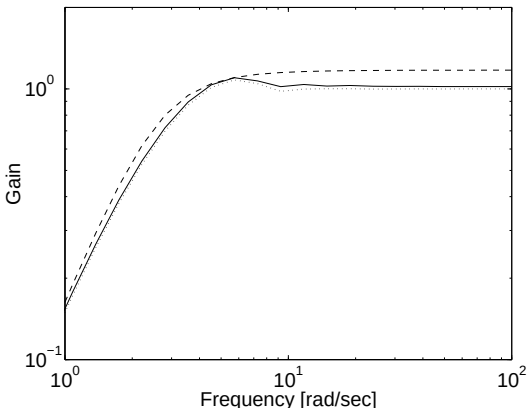


Fig. 8.7: Advantage of $m_{11}(s) \neq 0$

Table. 8.1: Coefficients of $m_{11}(s)$ and $m_{12}(s)$, and γ_{opt}

	n	k	a_0	a_1	b_0	b_1	α	γ_{opt}
case 1	3	1.17	6.91	4.10	0	0	1.15	0.169
case 2	3	1.02	7.59	3.39	-1.73	-0.037	1.02	0.141
case 3	6	1.13	13.35	5.68	0	0	1.11	0.116

(case 1) に示す．また，点線に $|\Delta(j\omega)|$ を示す. 実線の方が, 破線よりもタイトに点線を覆っていることがわかる．

以上のもとで，第 8.4 節 の結果を用いて，Fig. 8.6 の閉ループ系を内部安定化し，かつ w から z までの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを γ 未満にする実装可能な補償器 $\mathcal{K}$ を設計した．各 n に対する γ の最小値 γ_{opt} は Table. 8.1 の右端に示されている．case 1, 3 を比較すると，近似次数の高い方が γ_{opt} が小さいことがわかる．また，case 1, 2 を比較すると，同じ近似次数ならば，$m_{11}(s)$ を非零に選ぶ場合の方が γ_{opt} が小さくなり，性能が改善されることがわかる．得られた補償器を用いてシミュレーションを行った結果を Fig. 8.8 に示す．図は外乱 w として，点線で示すステップ外乱を与えたときの出力 y を示している．破線，薄い実線, 濃い実線はそれぞれ case 1, 2, 3 に対応する．近似指数が高い方が過渡応答がよく，速やかに 0 に収束している. また，同じ近似次数では，$m_{11}(s)$ を非零に選んだ場合の方が，よりよい応答を示している．

つぎに，case 1 の有限次元近似を用いて，従来手法と提案手法を比較する．従来手法では，Fig. 8.2 における，$\delta(s)$ の出力が観測可能であるという性質を用いることなく補償器を設計するため，実際に $\delta(s)$ を必要とするゲインスケジューリング補償器が得られる．ここでは $\delta(s)$ を，むだ時間要素と $m_{12}(s), m_{22}(s)$ を用いて構成する．一方，提案手法では，$\delta(s)$ の出力を必要とするが，$\delta(s)$ そのものは必要としない補償器が得られる．両手法において，外乱 $w = 0$ とし，補償器内部のむだ時間要素の直前にステップ外乱 d (初期値 0.01，時刻 $t = 10$ で 0 に立ち下がる) を入力したときの出力 y の応答を Fig. 8.9 に示す. 実

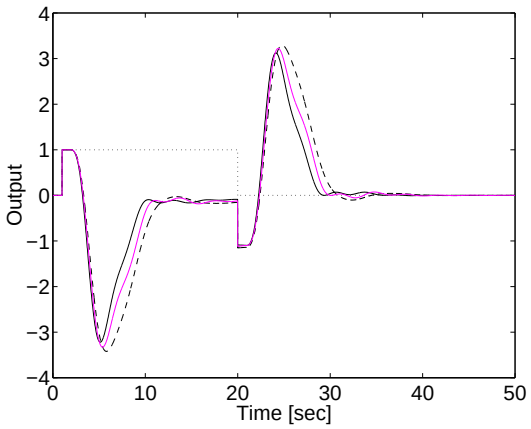


Fig. 8.8: Step Disterbance Response (proposed method)

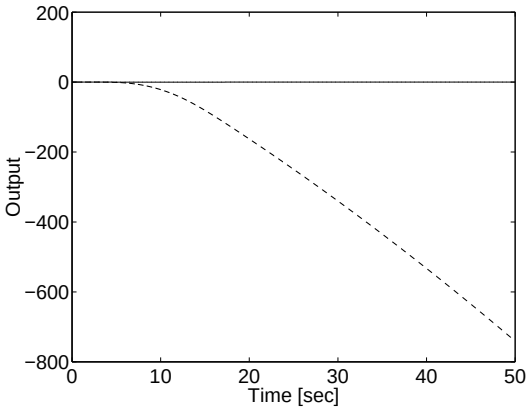


Fig. 8.9: Step Disterbance Response (solid line: proposed method, broken line: current method)

線が提案手法の場合，破線が従来手法の場合である．従来手法では，原点における 2 重の極零相殺が存在するため，出力 y が発散しているが，提案手法では内部安定性が保証されているため，このような現象は起こらない．

8.7　結言

むだ時間要素の入力を観測することが可能な場合における $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に対して，むだ時間要素を有限次元近似し，その近似誤差をスケジューリングパラメータとみなしたゲインスケジューリングによって補償器を設計する手法を示した．一般に，むだ時間要素の有限次元近似誤差は実装が困難な無限次元システムとなるが，本手法で提案した補償器は，近似誤差に対するゲインスケジューリングによって設計された補償器であるにもかかわらず，近似誤差を用いることなく，むだ時間要素と有限次元システムのみを用いて実装可能である．

また，むだ時間要素を LFT 形式で表現するための一つの方法を示し, LFT 形式を用いる利点を数値例により示した．しかし, 本章で提示した手法はむだ時間要素の n 次遅れ近似に基づいており，Pade 近似を用いた場合など，検討の余地がある．また，有限次元近似と達成可能な制御性能の関係など，不明な点が残されており，有限次元近似のための系統的な手法の確立が重要であると考える．

本章では，むだ時間要素の入力が観測可能な場合を考えたが，本章の結果を，むだ時間要素を持つ安定な要素の入力が観測可能な場合に拡張することも可能である．その結果を用いれば，第 6 章 で提案した，むだ時間要素を含む重み関数に基づく周期外乱抑制制御系の設計問題に対して，むだ時間要素の有限次元近似と近似誤差のゲインスケジューリングを行い，保守性の低い設計を行うことができる．実際に超音波モータの回転速度制御系に適用すれば，第 6 章 第 6.7 節 よりもさらによい制御性能が得られると考えられるが，これについては今後の課題としたい．

第9章　結論

現実の制御対象に対して高い性能を持つ制御系を得るためには，できる限り正確な制御対象のモデルと制御系の設計仕様を用いて保守性の低い設計を行うことが重要である．ただし，制御対象のモデルおよび制御系の設計仕様を複雑にしていくと，補償器実装時の計算量の増大が問題となるので，この計算量を低く抑えることも実用上重要となる．

第 2 章 ~ 第 6 章 では，超音波モータを制御対象として，超音波モータ制御上の問題点の把握→従来の手法を適用した場合の問題点の指摘→問題点を解決する手法の開発とその応用というステップを踏むことにより，高性能な回転速度制御系を得るための手法を検討した．その際，問題点と解決法を，制御対象のモデルおよび制御系の設計仕様の 2 つの観点で整理し，それぞれに対してゲインスケジューリング手法を用いて，問題点を解決する手法を与えた (Table. 9.1). 得られた結果の要約はつぎの通りである:

Table. 9.1: Current and proposed method corresponded to problems of USM

	制御対象のモデル	制御系の設計仕様
制御上の問題点	非線形特性	周期的な回転速度変動
補償器の構造	センサ電圧依存の LPV モデル	むだ時間要素の LFT
従来手法	ゲインスケジューリング	修正繰返し制御
その問題点	設計が保守的になる	ピーク特性が消滅する
提案手法	パラメータ推定誤差を考慮したゲインスケジューリング	むだ時間要素を含む重み関数を用いた設計

- 制御対象のモデルの観点

  プラントモデルの入出力をそれぞれステータの加振周波数，ロータの回転速度とすると，本超音波モータの場合には，プラントのゲインがセンサ電圧に強く依存するという非線形特性を示す．よって，センサ電圧の情報を利用すれば，高い制御性能が得られるものと期待される．ところが，センサ電圧依存の LPV システムを用いてプラントモデルを記述し，これに対して従来のゲインスケジューリングを直接適用すると，制御性能を改善させることができない (第 2 章)．

  パラメータの推定誤差をともなう場合には，推定精度に応じて端点を切り詰めたパラメータを制御に利用することにより，保守性の低い制御を行うことができ，制御性能を向上させることができる (第 3 章).

この知見に基づいて，実際に超音波モータの回転速度制御系を構成して実験を行い，センサ電圧依存のゲインスケジューリング補償器が有効であることをり確認した (第 4 章).

- 制御系の設計仕様の観点

  超音波モータの回転速度はロータの回転に同期して変動するが，修正繰返し制御を行えば，回転同期の速度変動を重点的に抑制することができる (第 5 章). ところが，さらに設計の保守性を低減させようとする場合に，補償器の構造をむだ時間要素の LFT としてゲインスケジューリング手法を適用すると，周期外乱を抑制する性能が劣化する (第 2 章, 第 6 章).

  この問題が生じるのは，修正繰返し補償器が内部モデルとして働かず，閉ループ系の積分特性しか指定できないことが原因であると考えられる．実際に，ゲインスケジューリング手法に基づく修正繰返し制御系設計問題は，I 型サーボ系の設計問題と可解性が等価となる．これに対して，修正繰返し補償器を感度関数に対する重み関数に含めて補償器の設計を行えば，周期外乱を抑制する性能を劣化させることなく，設計の保守性を低減させることが可能になる．実際に，超音波モータの回転速度制御系を構成して実験を行い，提案手法の有効性を確認した (第 6 章)．

よって，実際の制御対象に対して制御系設計を行う場合，ゲインスケジューリング手法を直接適用しても直ちに性能が改善されないことがある．このような場合には，提案手法で行っているような工夫が重要となる．

第 7 章, 第 8 章 では，安定なサブシステムを持つ一般化プラントに対して，補償器の実装を容易にするために，サブシステムの複製を持つ補償器を設計するための手法を提案した．

- 第 7 章 では，一般化プラントの状態の一部をある安定なシステムを用いて生成できる場合に，次数は従来のフルオーダの設計を行う場合と同じであるが，安定なシステムを陽に持つ構造の補償器を得ることができる設計手法を提案した．そのために，まず，与えられた問題が，一部の状態が観測できるとした等価な問題に帰着できることを示し，さらにその等価な問題に対する解と安定なシステムを用いてもとの問題に対す補償器が得られることを示した．また，提案手法により得られる補償器の構造を利用することによって，実際に補償器実装時の計算量が低減させることを示した．

- 第 8 章 では，制御対象のモデルや制御系の設計仕様に連続時間のむだ時間要素が関係する制御系設計問題に対して，保守性の低い補償器設計手法を提案した．設計の保守性低減のため，(1) むだ時間要素を有限次元近似し (2) 補償器の構造を近似誤差の LFT に仮定した上で，ゲインスケジューリング手法を適用して補償器設計を行う従来の方法では，無限次元の近似誤差を実装する必要があるため補償器の実装は困難である．これに対して本章では「安定なサブシステム」であるむだ時間要素と有限次元システムを用いて実装可能な補償器を得るための手法を提案した．

よって，補償器の実装を容易に行うために，必ずしも補償器の次数にのみ着目する必要はない．提案手法のような，実装が容易な構造を有する補償器を得ることも実用上重要である．

以上を総括すると，本論文の結果が，実システムに対して制御系を設計・実装する上で，貢献する点はつぎの通りである:

- 超音波モータの回転速度制御を題材として，LPV や LFT の構造を有する補償器をゲインスケジューリング手法を適用して設計する際の問題点を指摘し，これを解決する補償器設計手法を提案した．さらに，実験によりその有効性を示した (第 2 章 ~ 第 6 章)．
- 構造を有する補償器を得るための手法を提案し，その構造を利用することにより，補償器の実装が容易になることを示した (第 7 章, 第 8 章).

今後の課題として，以下の問題が残されている．

- 超音波モータ以外の対象への応用 (プリンタ，スキャナなど)．
- 実装面を考慮した補償器設計法の，実システムへの応用．

関連図書

[1] T. Asai and S. Hara: A unified approach to LMI-based reduced order self-scheduling control synthesis, *Syst. & Contr. Lett.*, **36**, 75/86 (1999)

[2] A. Packard and J. Doyle: The Complex Structured Singular Value, *Automatica*, **29**–1, 71/109 (1993)

[3] 細江, 荒木: 制御系設計 –H_∞ 制御とその応用 –, 朝倉書店 (1994)

[4] A. Packard: Gain scheduling via linear fractional transformations, *Syst. & Contr. Lett.*, **22**, 79/92 (1994)

[5] P. Apkarian and R. J. Adams: Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems, *IEEE Trans. Contr. Sys. Tech.*, **6**–1, 21/32 (1998)

[6] 藤岡: IQC に基づく非線形・時変システムの安定性解析: ロバスト制御をめざす立場から, SICE セミナー「ロバスト制御入門」テキスト, 99/119 (2001)

[7] 浅井, 原: パラメータ変動のモデリングと設計を同時に行うロバスト制御系設計法, 計測自動制御学論文集, **32**–1, 35/44 (1996)

[8] 中野, 井上, 山本, 原: 繰返し制御, 計測自動制御学会 (1989)

[9] 西馬, 木村: むだ時間が変動する不確かなシステムのゲインスケジューリング制御, 計測自動制御学論文集, **35**–12, 1559/1566 (1999)

[10] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali: Multiobjective output-feedback control via lmi optimization, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **42**–7, 896/911 (1997)

[11] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover: *ROBUST AND OPTIMAL CONTROL* (1996)

[12] P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *Internat. J. of Robust and Nonlin. Contr.*, **4**, 421/448 (1994)

[13] 見城, 指田: 超音波モータ入門, 総合電子出版社 (1991)

[14] 泉野, 中岡: 進行波形超音波モータ駆動系の適応制御技法による高性能化, 電気学会論文集 D, **110**–11, 1147/1154 (1990)

[15] 泉野, 中岡: 進行波型超音波モータの回転むら低減を考慮した速度サーボ制御システム, 信学論, **J80-A**–10, 1728/1735 (1997)

[16] 千住, 上里: ハイブリッド制御による超音波モータの速度制御, 計測自動制御学会論文集, **30**–7, 877/879 (1994)

[17] 千住, 宮里, 上里: ニューラルネットワークによる超音波モータの速度制御, 電気学会論文誌 D, **116**–3, 369/370 (1996)

[18] 千住, 平良, 上里: 適応制御による超音波モータの速度制御, 電気学会論文誌 D, **113**–10, 1226/1227 (1993)

[19] 千住, 川口, 上里: 超音波モータの速度制御, 琉球大学工学部紀要, **49**, 131/148 (1995)

[20] 内田: ゲインスケジューリング, 計測と制御, **34**–3, 182/187 (1995)

[21] 渡辺, 内田, 示村, 藤田: Scheduling Parameter を持つ線形システムの H_∞ 制御, 計測自動制御学会第 16 回 DST シンポジウム予稿集, 1/6 (1993)

[22] P. Apkarian and P. Gahinet: A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **40**–5, 853/864 (1995)

[23] J. S. Shamma: Robust stability with time varying structured uncertainty, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **39**–4, 714/724 (1994)

[24] 山田, 藤岡, 原: 定数スケーリング h_∞ 制御問題の凸性, 計測自動制御学会 第 23 回 制御理論シンポジウム予稿集, 101/106 (1994)

[25] K. Zhou, A. Packard and J. C. Doyle: Review of LFTs, LMIs, and μ (1991)

[26] P. Gahinet and P. apkarian: Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ controllers with application, Proc. 32nd CDC, 656/661 (1994)

[27] T. Iwasaki and R. E. Skelton: All Controllers for the General $\mathcal{H}_\infty$ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas, *Automatica*, **30**–8, 1307/1317 (1994)

[28] 三島, 浅井, 原: 双一次変換パラメータを持つ補間コントローラ, 計測自動制御学会 第 23 回 制御理論シンポジウム予稿集, 57/62 (1994)

[29] 新生工業: 超音波モータ USR-60 取扱説明書

[30] S. Hara, H. Fujioka, T. Kosugiyama and T. Asai: A Synthesis for Robust Tracking Systems Based on $\mathcal{H}_\infty$ Control, *Trans. of SICE*, **32**–4, 502/509 (1996)

[31] 原, 小俣, 中野: 繰返し制御系の安定条件と設計法, 計測自動制御学会論文集, **22**–1, 36/42 (1986)

[32] 金子, 川谷: ループ整形設計手法を用いた修正繰返し制御系の設計, 計測自動制御学論文集, **31**–8, 1144/1151 (1995)

[33] S. Hara, T. Preechai and Y. Chen: Robust stabilization for repetitive control systems, Proc. of 1st ASCC, 541/544 (1994)

[34] H. Tokunaga, T. Iwasaki and S. Hara: Analysis and synthesis of the robust impulse-to-peak performance, *Automatica*, **34**–11, 1473/1477 (1998)

[35] 大前, 平井, 涌井: 情報システムにおける制御, 産業制御シリーズ, No. 5, コロナ社 (1999)

[36] 小林, 浅井: むだ時間を含む重み関数を用いた周期外乱抑制制御系の設計, 計測自動制御学会 第 38 回 学術講演会予稿集, 205/206 (1999)

[37] 加藤，舟橋: 繰り返し制御器の一構成法, 計測自動制御学会論文集, **32**–12, 1601/1605 (1996)

[38] I. Masubuchi, A. Ohara and N. Suda: LMI-based controller synthesis: a unified formulation and solution, *Internat. J. of Robust and Nonlin. Contr.*, **8**–8, 669/686 (1998)

[39] M. Chilali and P. Gahinet: $\mathcal{H}_\infty$ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **41**–3, 358/367 (1996)

[40] T. Kailath: *Linear Systems* (1980)

[41] 原: ロバスト制御系設計法: H_∞ 制御から LMI へ, SICE セミナー「ロバスト制御入門」テキスト, 23/50 (2001)

[42] 美多, 原, 近藤: 基礎ディジタル制御, コロナ社 (1988)

[43] 山田, 原: 定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御大域最適化問題の計算複雑度解析— ブロック対角ケース —, 計測自動制御学会論文集, **35**–4, 506/514 (1999)

[44] 杉本, 鷲田: むだ時間補正型修正繰り返し制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **34**–7, 761/768 (1998)

[45] A. Kojima and S. Ishijima: $\mathcal{H}_\infty$ control for delay systems: Characterization with finite-dimensional operations, Proc. 33rd CDC, 1343/1349 (1994)

[46] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum: *FEEDBACK CONTROL THEORY*, MAXWELL MACMILLAN (1992)

[47] J. Hozumi, H. Fujioka and S. Hara: Robust servo problem with $\mathcal{H}_\infty$ norm constraint, *Internat. J. of Contr.*, **66**–6, 803/823 (1997)

[48] Y. Yamada and S. Hara: Global optimization for $\mathcal{H}_\infty$ control with constant diagonal scaling, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **43**–2, 191/203 (1998)

[49] K. C. Goh, M. G. Safonov and J. H. Ly: Robust synthesis via bilinear matrix inequalities, *Internat. J. of Robust and Nonlin. Contr.*, **6**–9–10, 1079/1095 (1996)

[50] 児島, 石島: $\mathcal{H}_\infty$ 予見制御測の構成, 計測自動制御学会論文集, **35**–1, 77/84 (1999)

[51] 岩崎: LMI と制御, 昭晃堂 (1997)

付 録A　第6章 の定理の証明

A.1　定理 6.1 の証明

後に示す 補題 A.1, 補題 A.2 を用いて，(i) ゲインスケジューリングに基づく修正繰返し制御系設計問題と (ii) I 型サーボ系設計問題の可解性が等価であることを示す．

証明 まず，補題 A.1 より，(i) の可解性が成立するための必要十分条件は，$\mathcal{G}(s)$ と $K(s)$ からなる閉ループ系を内部安定化し，かつ $\|\mathcal{G}\star K\|_\infty < 1$ を満足するようなスケーリング行列 $D>0$ と補償器 $K(s)$ が存在することとなる．ただし，$\mathcal{G}(s)$ はつぎのように与えられる．

$$\mathcal{G}(s)=\left[\begin{array}{cc|cc:c} A & 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ B_FC_2 & A_F & B_FD^{\frac{1}{2}} & B_FD_{21} & 0 \\ \hline D^{-\frac{1}{2}}D_FC_2 & D^{-\frac{1}{2}}C_F & D^{-\frac{1}{2}}D_FD^{\frac{1}{2}} & D^{-\frac{1}{2}}D_FD_{21} & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} \\ \hdashline 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & D_{21} & 0 \end{array}\right] \tag{A.1}$$

$\mathcal{G}(s)$ に対して補題 A.2 を適用し整理すると，(i) の必要十分条件は，つぎの LMI を満たす X_1, X_2, X_3, Y_1, D が存在することとなる．

$$N_XG_XL_XG_X^TN_X^T<0 \tag{A.2}$$

$$\begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} A^T & C_1^T & I & 0 \\ B_1^T & D_{11}^T & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_1 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{A.3}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_3^T & I \\ X_3 & X_2 & 0 \\ I & 0 & Y_1 \end{bmatrix} > 0 \tag{A.4}$$

$$N_X=\left[\begin{array}{c:cc} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} I & 0 \\ 0 & I \end{matrix} \end{array}\right], \quad G_X=\left[\begin{array}{cccc:cccc} A & B_1 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline B_FC_2 & B_FD_{21} & 0 & 0 & A_F & B_F & I & 0 \\ D_FC_2 & D_FD_{21} & 0 & 0 & C_F & D_F & 0 & I \end{array}\right]$$

$$L_X = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 0 & X_1 & 0 & 0 & 0 & X_3^T & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 & 0 & X_3^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & X_3 & 0 & 0 & 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 & 0 & X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D \end{array}\right]$$

一方，(ii) の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に対応する一般化プラントはつぎのように書ける．

$$\mathcal{G}(s) = \left[\begin{array}{cc:cc} A & 0 & B_1 & B_2 \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 \\ \hline C_1 & 0 & D_{11} & D_{12} \\ \hdashline 0 & I & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

よって，$\mathcal{G}(s)$ に補題 A.2 を適用して整理すると，(i) の必要十分条件は，(A.3) 式 とつぎの LMI を満たす $X_1, \hat{X}_3, Y_1$ が存在することとなる．

$$\hat{N}_X \hat{G}_X \hat{L}_X \hat{G}_X^T \hat{N}_X^T < 0 \tag{A.5}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 & I \\ I & Y_1 \end{bmatrix} > 0 \tag{A.6}$$

$$\hat{N}_X = \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp & 0 \\ \hdashline 0 & I \end{array}\right], \quad \hat{G}_X = \left[\begin{array}{cccc:c} A & B_1 & I & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 & I & 0 \\ \hdashline C_2 & D_{21} & 0 & 0 & I \end{array}\right], \quad \hat{L}_X = \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & X_1 & 0 & \hat{X}_3^T \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ \hdashline \hat{X}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(i), (ii) で (A.3) 式 が共通であるので，以下では，(A.2) 式, (A.4) 式 が，(A.5) 式, (A.6) 式 の条件と等価であることを示す．

(i) $\Rightarrow$ (ii): (A.2) 式, (A.4) 式 を満たす X_1, X_2, X_3, D が存在したと仮定する．このとき，$F(0) = I$ より $D_F = I + C_F A_F^{-1} B_F$ であることに注意すると，(A.2) 式 の左辺に，左から N_F, 右から N_F^T をかければ，(A.5) 式 を得る．ここで，

$$N_F = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -C_F A_F^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad \hat{X}_3 = -C_F A_F^{-1} X_3.$$

また，(A.4) 式 より (A.6) 式 は成立する．

(ii) $\Rightarrow$ (i): (A.5) 式, (A.6) 式 を満たす $X_1, \hat{X}_3$ が存在したと仮定する．このとき，$X_3 = -A_F C_F^{\dagger} \hat{X}_3$ と定義すると，つぎが成立する．

$$\Sigma_1 := N_F N_X G_X L_X G_X^T N_X^T N_F^T < 0$$

仮定より，(6.13) 式, (6.14) 式 を満たす $P > 0$ が存在する．このとき，十分大きな $\alpha > 0$ に対して，つぎの不等式が成立する．

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_3^T \\ \Sigma_3 & \Sigma_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{A.7}$$

$$\Sigma_3^T := N_F G_X \begin{bmatrix} X_3^T \\ D_{21}^T B_F^T \\ X_1 C_2^T B_F^T + X_3 A_F^T \\ 0 \\ -C_F A_F^{-1} X_3 C_2^T B_F^T \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2 := B_F C_2 X_3^T + X_3 C_2^T B_F^T + B_F D_{21} D_{21}^T B_F^T + \alpha (A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T)$$

ここで，$X_2 = \alpha P, D = \alpha I$ と定義すると，(A.7) 式 は (A.2) 式 と等価である．また，α が十分大きいので，(A.6) 式 より (A.4) 式 が成立する．□

補題 A.1 定理 *6.1* の *(i)* の条件が成立するための必要十分条件は，適当なスケーリング行列 $D > 0$ と補償器 $K(s)$ が存在して，*(A.1)* 式 で与えられる $\mathcal{G}(s)$ と $K(s)$ からなる閉ループ系が内部安定となり，かつ $\|\mathcal{G} \star K\|_\infty < 1$ が成立することである．

証明 第 8.4.2 節 と同様の議論を行うことにより，(i) の補償器の設計問題は，問題 7.2 の設計問題に帰着される．ただし，(7.46) 式 の G は (6.11) 式 のように与えられる．このとき，

$$\begin{bmatrix} A_{ss_0} & A_{s\theta_0} & B_{s_{0y}} & B_{s_{0u}} \\ A_{\theta s_0} & A_{\theta\theta_0} & B_{\theta_{0y}} & B_{\theta_{0u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F & 0 & B_F & 0 \\ C_F & 0 & D_F & 0 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

$$S_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ J_s & I \end{bmatrix}, \quad S_\theta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ J_\theta & I \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

$$A_{\cdot\cdot_{12}} = 0,\ C_{1\cdot_2} = 0,\ C_{2\cdot_2} = 0,\ C_{3s_2} = I,\ C_{3\theta_2} = 0,\ C_{4s_2} = 0,\ C_{4\theta_2} = I \tag{A.10}$$

とおくと 定理 7.2 の仮定が成立する．そこで，(i) の補償器の設計問題に対して 定理 7.2 を適用すると，(i) の補償器が存在するための必要十分条件は，一般化プラント G を

$$G = \left[\begin{array}{cc|ccc} A & 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ B_F C_2 & A_F & B_F & B_F D_{21} & 0 \\ \hline D_F C_2 & C_F & D_F & D_F D_{21} & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} \\ \hdashline C_2 & 0 & I & D_{21} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{A.11}$$

とおいた 問題 7.2 の可解性と等価になる．ここで，(A.11) 式 の一般化プラントでは，スケジューリングパラメータの全ての出力を観測することができる．よって，第 8.4.2 節 と同様の議論を行うことにより，(i) の補償器が存在する条件は，(A.11) 式 を一般化プラントとする定数スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の可解性と等価となる．さらに，G の下側の 3 行を入れ替えても問題の可解性は変わらない．最後に，G にスケーリング行列 D をかければ，(A.1) 式 の一般化プラントを得る．□

補題 **A.2** *[51]* 一般化プラント $\mathcal{G}(s)$ がつぎのように与えられたとする．

$$\mathcal{G}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ \hline \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21} & 0 \end{array}\right]$$

このとき $\mathcal{G}(s)$ と補償器 $\mathcal{K}(s)$ からなる閉ループ系を内部安定化し，かつ $\|\mathcal{G} \star \mathcal{K}\|_\infty < 1$ を満たす $\mathcal{K}(s)$ が存在するための必要十分条件は，つぎの LMI を満足する行列 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ が存在することである．

$$\left[\begin{array}{c} \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{D}_{12} \end{array}\right]^{\perp} \left[\begin{array}{cccc} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 & I & 0 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} & 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \mathcal{A}^T & \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{B}_1^T & \mathcal{D}_{11}^T \\ I & 0 \\ 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{D}_{12} \end{array}\right]^{\perp T} < 0 \tag{A.12}$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathcal{C}_2^T \\ \mathcal{D}_{21}^T \end{array}\right]^{\perp} \left[\begin{array}{cccc} \mathcal{A}^T & \mathcal{C}_1^T & I & 0 \\ \mathcal{B}_1^T & \mathcal{D}_{11}^T & 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \mathcal{Y} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \mathcal{Y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathcal{C}_2^T \\ \mathcal{D}_{21}^T \end{array}\right]^{\perp T} < 0 \tag{A.13}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{X} & I \\ I & \mathcal{Y} \end{array}\right] > 0 \tag{A.14}$$

A.2 命題 6.1 の証明

証明 C_F が行フルランクであり，かつ，(6.13) 式, (6.14) 式 を満足する $P > 0$ が存在したとする．このとき，(6.13) 式 より，明らかに A_F は右閉半平面に固有値を持たない．さらに，

$$\begin{bmatrix} -C_F A_F^{-1} & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T & P C_F^T + B_F D_F^T \\ C_F P + D_F B_F^T & -I + D_F D_F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_F A_F^{-1} & I \\ I & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad \text{(A.15)}$$

が成り立つ．ただし，

$$R = A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T < 0$$

である．ここで，行列

$$\begin{bmatrix} -C_F A_F^{-1} & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

は正則なので，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T & P C_F^T + B_F D_F^T \\ C_F P + D_F B_F^T & -I + D_F D_F^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -C_F A_F^{-1} & I \\ I & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_F A_F^{-1} & I \\ I & 0 \end{bmatrix}^{-T} & \text{(A.16)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & C_F A_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & C_F A_F^{-1} \end{bmatrix}^T & \text{(A.17)} \\ &= \begin{bmatrix} I \\ C_F A_F^{-1} \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} I & A_F^{-T} C_F^T \end{bmatrix} & \text{(A.18)} \end{aligned}$$

が成り立つ．これより，

$$-I + D_F D_F^T = C_F A_F^{-1} R A_F^{-T} C_F^T$$

がなりたつ．ここで，R は負定であり，C_F は行フルランクなので，$-I + D_F D_F^T < 0$ となる．よって，$\bar{\sigma}(D) < 1$ が成り立つ．

一方，任意の ω に対して，

$$\begin{aligned} &-I + F(j\omega)F(j\omega)^* \\ &= \begin{bmatrix} C_F(j\omega I - A_F)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T & P C_F^T + B_F D_F^T \\ C_F P + D_F B_F^T & -I + D_F D_F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A_F)^{-*} C_F^T \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，(A.18) 式 を用いると，

$$\begin{aligned} -I + F(j\omega)F(j\omega)^* &= \begin{bmatrix} C_F(j\omega I - A_F)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C_F A_F^{-1} \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} I & A_F^{-T} C_F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A_F)^{-*} C_F^T \\ I \end{bmatrix} \\ &= C_F((j\omega I - A_F)^{-1} + A^{-1}) R ((j\omega I - A_F)^{-*} + A_F^{-T}) C_F \\ &= C(j\omega I - A_F)^{-1} j\omega A_F^{-1} R (-j\omega) A^{-T} (j\omega I - A_F)^{-*} C_F^T \\ &= \omega^2 C_F (j\omega I - A_F)^{-1} A_F^{-1} R A_F^{-T} (j\omega I - A_F)^{-*} C_F^T \quad \text{(A.19)} \end{aligned}$$

が成り立つ．このとき，R は負定で，C_F は行フルランクであるので，0 でない ω に対して，

$$-I + F(j\omega)F(j\omega)^* < 0$$

が成り立つ．よって，$\bar{\sigma}(F(j\omega)) < 1$. 一方，$\omega = 0$ の場合には，$-I + F(0)F(0)^T = 0$, すなわち $F(0)F(0)^T = I$ が成り立つ．□

A.3　命題 6.2 の証明

証明 $F(0)F(0)^T = I$ が成り立つならば，

$$I - (D_F + C_F A_F^{-1} B_F)(D_F + C_F A_F^{-1} B_F)^T = 0 \tag{A.20}$$

が成り立つ．同様に，任意の 0 でない ω に対して $\bar{\sigma}(F(j\omega)) < 1$ が成り立つならば，

$$I - (D_F + C_F(j\omega I - A_F)^{-1} B_F)(D_F + C_F(j\omega I - A_F)^{-1} B_F)^* > 0 \tag{A.21}$$

が成り立つ．ここで C_F が行フルランクでないとすると，ある 0 でないベクトル ξ が存在して，$\xi_T C_F = 0$ が成り立つ．よって，(A.20) 式 より，

$$\xi^T (I - D_F D_F^T)\xi = 0 \tag{A.22}$$

が成り立つ．ところが，このとき，

$$\xi^T \left[I - (D_F + C_F(j\omega - A_F)^{-1} B_F)(D_F + C_F(j\omega - A_F)^{-1} B_F)^* \right] \xi = \xi^T (I - D_F D_F^T)\xi = 0 \tag{A.23}$$

となるため，(A.21) 式 に矛盾する．よって，C_F は行フルランクである．

仮定より，明らかに $F(s)$ は安定で，かつ $\|F\|_\infty \leq 1$ である．また，(A_F, C_F) は可観測なので，KYP 補題 [51] より，ある $P = P^T$ が存在して，

$$\begin{bmatrix} A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T & P C_F^T + B_F D_F^T \\ C_F P + D_F B_F^T & -I + D_F D_F^T \end{bmatrix} \leq 0 \tag{A.24}$$

が成り立つ．さらに (A_F, B_F) が可制御であることから，P は正定となる [11]. よって (6.16) 式 が成り立つ．一方，

$$\begin{bmatrix} Q & S^T \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_F A_F^{-1} & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_F P + P A_F^T + B_F B_F^T & P C_F^T + B_F D_F^T \\ C_F P + D_F B_F^T & -I + D_F D_F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_F A_F^{-1} & I \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \tag{A.25}$$

とおくと，明らかに

$$\begin{bmatrix} Q & S^T \\ S & R \end{bmatrix} \leq 0 \tag{A.26}$$

である．ここで，(A.19) 式 と $F(0)F(0)^T = I$ より，$Q = 0$ が成り立つ．このとき，(A.26) 式 の行列が半負定であるためには，$S = 0$ でなければならない．よって，$S = 0$ と (A.25) 式 より，(6.17) 式 が成り立つ．□

付 録B　第7章 の定理の証明

B.1　定理 7.1 の証明

証明 一般性を失うことなく $D_{22}=0$ を仮定する．

(i) $\Rightarrow$ (ii): (i) の補償器 K

$$K=\left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right] \tag{B.1}$$

が存在したと仮定する．このとき，Fig. 7.1 の閉ループ伝達関数の実現

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{cc|c} A+B_2D_KC_2 & B_2C_K & B_1+B_2D_KD_{21} \\ B_KC_2 & A_K & B_KD_{21} \\ \hline C_1+D_{12}D_KC_2 & D_{12}C_K & D_{11}+D_{12}D_KD_{21} \end{array}\right] \tag{B.2}$$

に対して，(7.2) 式 を満足する $\mathcal{Y}>0$ が存在する．一方，K の実現を用いて，

$$\hat{K}=\left[\begin{array}{c|cc} A_K & B_K & 0 \\ \hline C_K & D_K & 0 \end{array}\right] \tag{B.3}$$

とおくと，簡単な計算より $\hat{G}$ と $\hat{K}$ からなる閉ループ系の状態空間実現は (B.2) 式 に一致する．よって (B.3) 式 の $\hat{K}$ は (ii) の条件を満足する補償器となる．

(ii) $\Rightarrow$ (i): (ii) の補償器 $\hat{K}$ が存在すると仮定する．すなわち，$\hat{G}$ と $\hat{K}$ からなる閉ループ系の状態空間実現 $\left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathcal{A}} & \hat{\mathcal{B}} \\ \hline \hat{\mathcal{C}} & \hat{\mathcal{D}} \end{array}\right]$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} A+B_2(\hat{D}_{K_y}C_2+\hat{D}_{K_{x_0}}J) & B_2\hat{C}_K \\ \hat{B}_{K_y}C_2+\hat{B}_{K_{x_0}}J & \hat{A}_K \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} B_1+B_2\hat{D}_{K_y}D_{21} \\ \hat{B}_{K_y}D_{21} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} C_1+D_{12}(\hat{D}_{K_y}C_2+\hat{D}_{K_{x_0}}J) & D_{12}\hat{C}_K \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{D}}=D_{11}+D_{12}\hat{D}_{K_y}D_{21} \end{aligned}$$

に対して，

$$\Phi(\hat{\mathcal{Y}},\hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{A}},\hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{B}},\hat{\mathcal{C}},\hat{\mathcal{D}})<0 \tag{B.4}$$

を満足する $\hat{\mathcal{Y}}>0$ が存在すると仮定する．ただし $\hat{K}$ の実現を (7.14) 式 で与える．ここで $\Phi(\cdot)$ の公理 (c) より，十分大きな $\alpha>0$ を用いて

$$\bar{\mathcal{Y}}=\mathrm{diag}(\hat{\mathcal{Y}},\alpha Y_0) \tag{B.5}$$

とおけば，つぎの LMI が成立する．

$$\Phi(\bar{\mathcal{Y}}, \bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{C}}, \bar{\mathcal{D}}) < 0 \tag{B.6}$$

ただし，

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathcal{A}} & \bar{\mathcal{B}} \\ \hline \bar{\mathcal{C}} & \bar{\mathcal{D}} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{cc|c} \hat{\mathcal{A}} & \begin{bmatrix} A_{12} + B_2(\hat{D}_{K_y}C_{22} + \hat{D}_{K_{x_0}}C_{32}) \\ \hat{B}_{K_y}C_{22} + \hat{B}_{K_{x_0}}C_{32} \end{bmatrix} & \hat{\mathcal{B}} \\ 0 & A_0 & 0 \\ \hline \hat{\mathcal{C}} & C_{12} + D_{12}(\hat{D}_{K_y}C_{22} + \hat{D}_{K_{x_0}}C_{32}) & \hat{\mathcal{D}} \end{array}\right] \tag{B.7}$$

で，$Y_0 > 0$ は Σ の実現 (7.9) 式 の A_0 に対して (7.4) 式 を満足する行列である．さらに公理 (b) を適用するとつぎの LMI が成立する．

$$\Phi(\mathcal{T}\bar{\mathcal{Y}}\mathcal{T}^T, \mathcal{T}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{A}}\mathcal{T}^T, \mathcal{T}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{C}}\mathcal{T}^T, \bar{\mathcal{D}}) < 0 \tag{B.8}$$

ただし

$$\mathcal{T}^T := R\,\mathrm{diag}(S^{-1}, I_{n-n_0})R^{-1} \tag{B.9}$$

$$R := \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-n_0} \\ 0 & I_{n_0} & 0 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

で，S は定理 7.1 の仮定を満足する正則行列である．(B.8) 式 は状態空間実現が

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{T}^{-T}\bar{\mathcal{A}}\mathcal{T}^T & \mathcal{T}^{-T}\bar{\mathcal{B}} \\ \hline \bar{\mathcal{C}}\mathcal{T}^T & \bar{\mathcal{D}} \end{array}\right] \tag{B.11}$$

で表される閉ループ系の LMI となっている．(7.10) 式 の関係を用いて簡単な計算を行うことにより，(B.11) 式 の状態空間実現は，(7.13) 式 の K を用いたときの Fig. 7.1 の閉ループ伝達関数の実現に一致する．以上より，(7.13) 式 の K が (i) の条件を満足する補償器となる．□

B.2　一部の状態が観測出力に含まれる場合の低次元補償器の設計 [1]

定理 B.1 $\Phi(\cdot)$ は与えられた *LMI* のテンプレートで，第 *7.2* 節 の *3* つの公理を満たすものとする．このとき，*(7.12)* 式 により与えられた一般化プラント $\hat{G}$ に対して，$\hat{K}$ と $\mathcal{Y} > 0$ が存在して $\hat{K}$ と $\hat{G}$ からなる閉ループ系の状態空間実現が *(7.2)* 式 の設計仕様を満足するための必要十分条件は，つぎの *LMI* を満たす実行列 M，$X > 0$，$Y > 0$ が存在することである．

$$\Phi(\Theta_{\mathcal{Y}}, \Theta_{\mathcal{A}}, \Theta_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{C}}, \Theta_{\mathcal{D}}) < 0 \tag{B.12}$$

ただし，

$$\Theta_{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} X & N^T \\ N & NYN^T \end{bmatrix} > 0, \quad N^T = \begin{bmatrix} I_{n-n_0} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

$$\Theta := \begin{bmatrix} \Theta_{\mathcal{A}} & \Theta_{\mathcal{B}} \\ \Theta_{\mathcal{C}} & \Theta_{\mathcal{D}} \end{bmatrix} = Q + UMV \tag{B.14}$$

$$Q = \left[\begin{array}{cc:c} AX & AN^T & B_1 \\ 0 & NYAN^T & NYB_1 \\ \hdashline C_1X & C_1N^T & D_{11} \end{array}\right], \quad U = \left[\begin{array}{cc} 0 & B_2 \\ I_{n-n_0} & 0 \\ \hdashline 0 & D_{12} \end{array}\right], \quad V = \left[\begin{array}{cc:c} I_n & 0 & 0 \\ 0 & C_2N^T & D_{21} \end{array}\right]$$

さらに，上の LMI の解が存在するとき，以下の K は (7.2) 式 を満足する補償器となる．

$$K = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}\hat{A}T & T^{-1}\hat{B} \\ \hline \hat{C}T & \hat{D} \end{array}\right] \tag{B.15}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = W_Y(M - M_0)W_X, \quad M_0 = \mathrm{diag}(NYAX, 0)$$

$$W_Y = \begin{bmatrix} -Z_1^{-1} & Z_1^{-1}NYB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad W_X = \begin{bmatrix} X^{-1}N^T & 0 & X^{-1}J_z^T \\ -C_2N^T & I & -C_2J_z^T \end{bmatrix}$$

$$J_z = \begin{bmatrix} -Z_3Z_1^{-1} & I_{n_0} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_3^T \\ Z_3 & Z_2 \end{bmatrix} = Y - X^{-1}$$

ただし T は正則な行列である．

B.3 状態とパラメータ出力の一部が観測出力に含まれる場合の低次元補償器の設計

定理 B.2 $\hat{G}$ は (7.57) 式 により与えられる一般化プラントであるとする．また，$\Phi(\cdot)$ は与えられた LMI のテンプレートで，第 $7.7.1$ 節 の 3 つの公理を満たすものとする．このとき，$\hat{K}$ と $\mathcal{Y}_s > 0$, $\mathcal{Y}_\theta > 0$ が存在して $\hat{G}_{cl} \star \hat{K}$ の状態空間実現 (7.48) 式 が (7.49) 式 を満足するための必要十分条件は，つぎの LMI を満たす実行列 M, $X_s > 0$, $Y_s > 0$, $X_\theta > 0$, $Y_\theta > 0$ が存在することである．ただし，$\hat{G}_{cl}$ を (7.58) 式 により与える．

$$\Phi(\Theta_{\mathcal{Y}_s}, \Theta_{\mathcal{Y}_\theta}, \Theta_{\mathcal{A}_{ss}}, \Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}}, \Theta_{\mathcal{B}_s}, \Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}}, \Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}}, \Theta_{\mathcal{B}_\theta}, \Theta_{\mathcal{C}_s}, \Theta_{\mathcal{C}_\theta}, \Theta_{\mathcal{D}}) < 0 \tag{B.16}$$

ただし，

$$\Theta_{\mathcal{Y}_s} = \begin{bmatrix} X_s & N_s^T \\ N_s & N_sY_sN_s^T \end{bmatrix} > 0, \quad \Theta_{\mathcal{Y}_\theta} = \begin{bmatrix} X_\theta & N_\theta^T \\ N_\theta & N_\theta Y_\theta N_\theta^T \end{bmatrix} \tag{B.17}$$

$$N_s = \begin{bmatrix} I_{n_s - n_{s_0}} & 0 \end{bmatrix}, \quad N_\theta = \begin{bmatrix} I_{n_\theta - n_{\theta_0}} & 0 \end{bmatrix} \tag{B.18}$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{\mathcal{A}_{ss}} & \Theta_{\mathcal{A}_{s\theta}} & \Theta_{\mathcal{B}_s} \\ \Theta_{\mathcal{A}_{\theta s}} & \Theta_{\mathcal{A}_{\theta\theta}} & \Theta_{\mathcal{B}_\theta} \\ \Theta_{\mathcal{C}_s} & \Theta_{\mathcal{C}_\theta} & \Theta_{\mathcal{D}} \end{bmatrix} = Q + UMV \tag{B.19}$$

$$Q = \left[\begin{array}{cc:cc:c} A_{ss}X_s & A_{ss}N_s^T & A_{s\theta}X_\theta & A_{s\theta}N_\theta & B_{1s} \\ 0 & N_sY_sA_{ss}N_s^T & 0 & N_sY_sA_{s\theta}N_\theta & N_sY_sB_{1s} \\ \hdashline A_{\theta s}X_s & A_{\theta s}N_s^T & A_{\theta\theta}X_\theta & A_{\theta\theta}N_\theta & B_{1\theta} \\ 0 & N_\theta Y_\theta A_{\theta s}N_s^T & 0 & N_\theta Y_\theta A_{\theta\theta}X_s & N_\theta Y_\theta B_{1\theta}N_\theta \\ \hdashline C_{1s}X_s & C_{1s}N_s^T & C_{1\theta}X_\theta & C_{1\theta}N_\theta & D_{11} \end{array}\right] \tag{B.20}$$

$$U = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & B_{2s} \\ I_{n_s-n_{s_0}} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & B_{2\theta} \\ 0 & I_{n_\theta-n_{\theta_0}} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & D_{12} \end{array}\right], \quad V = \left[\begin{array}{cc:cc:c} I_{n_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_\theta} & 0 & 0 \\ 0 & C_{2s}N_s^T & 0 & C_{2\theta}N_\theta^T & D_{21} \end{array}\right] \tag{B.21}$$

さらに，上の LMI の解が存在するとき，以下の K は (7.49) 式 を満足する補償器となる．

$$K = \left[\begin{array}{c|cc} T_s^{-1}\hat{A}_{ss}T_s & T_s^{-1}\hat{A}_{s\theta}T_\theta & T_s^{-1}\hat{B}_s \\ \hline T_\theta^{-1}\hat{A}_{\theta s}T_s & T_\theta^{-1}\hat{A}_{\theta\theta}T_\theta & T_\theta^{-1}\hat{B}_\theta \\ \hat{C}_sT_s & \hat{C}_\theta T_\theta & \hat{D} \end{array}\right] \tag{B.22}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \hat{A}_{ss} & \hat{A}_{s\theta} & \hat{B}_s \\ \hat{A}_{\theta s} & \hat{A}_{\theta\theta} & \hat{B}_\theta \\ \hat{C}_s & \hat{C}_\theta & \hat{D} \end{array}\right] = W_Y(M_K - M_0)W_X, \quad M_0 = \left[\begin{array}{ccc} N_sY_sA_{ss}X_s & N_sY_sA_{s\theta}X_\theta & 0 \\ N_\theta Y_\theta A_{\theta s}X_s & N_\theta Y_\theta A_{\theta\theta}X_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$W_Y = \left[\begin{array}{ccc} -Z_{s1}^{-1} & 0 & Z_{s1}^{-1}N_sY_sB_{2s} \\ 0 & -Z_{\theta 1}^{-1} & Z_{\theta 1}^{-1}N_\theta Y_\theta B_{2\theta} \\ 0 & 0 & I \end{array}\right], \quad W_X = \left[\begin{array}{ccccc} X_s^{-1}N_s^T & 0 & 0 & X_s^{-1}J_{sz}^T & 0 \\ 0 & X_\theta^{-1}N_\theta^T & 0 & 0 & X_\theta^{-1}J_{\theta z}^T \\ -C_{2s}N_s^T & -C_{2\theta}N_\theta^T & I & -C_{2s}J_{sz}^T & -C_{2\theta}J_{\theta z}^T \end{array}\right]$$

$$J_{sz} = \left[\begin{array}{cc} -Z_{s3}Z_{s1}^{-1} & I_{n_{s_0}} \end{array}\right], \quad J_{\theta z} = \left[\begin{array}{cc} -Z_{\theta 3}Z_{\theta 1}^{-1} & I_{n_{\theta_0}} \end{array}\right]$$

$$Z_s = \left[\begin{array}{cc} Z_{s1} & Z_{\theta 3}^T \\ Z_{s3} & Z_{s2} \end{array}\right] = Y_s - X_s^{-1}, \quad Z_\theta = \left[\begin{array}{cc} Z_{\theta 1} & Z_{\theta 3}^T \\ Z_{\theta 3} & Z_{\theta 2} \end{array}\right] = Y_\theta - X_\theta^{-1}$$

ただし，T_s, T_θ は正則な行列である．

証明 文献 [1] と同様の手順で証明できる．□

関連する研究業績

論文

1. 小林, 浅井, 原: パラメータ推定誤差を考慮したゲインスケジューリングコントローラの設計, 計測自動制御学会論文集, **32**–6, 826/834 (1996) (3 章)

2. 小林, 木村, 矢鍋: ステータの振幅に依存するゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御に基づく超音波モータのロバスト回転速度制御, システム制御情報学会論文誌, **15**–8 (2002), 掲載予定 (4 章)

3. 小林, 木村, 矢鍋: 繰返し補償器を併用した H_∞ 制御に基づく超音波モータのロバスト定速度制御, 日本機械学会論文集 C 編, **64**–627, 4271/4277 (1998) (5 章)

4. Y. Kobayashi, T. Kimura and S. Yanabe: Robust Speed Control of Ultrasonic Motor based on H_∞ Control with Repetitive Compensator, *JSME International Journal Series C*, **42**–4, 884/890 (1999) (5 章)

5. 小林, 浅井: 一般化プラントの状態を生成するシステムを陽に持つ補償器の設計, システム制御情報学会論文誌, **15**–10 (2002), 掲載予定 (7 章)

6. 小林, 浅井: むだ時間の有限次元近似と近似誤差のゲインスケジューリングに基づくあるクラスのむだ時間系設計問題に対する実装可能な補償器の設計, 計測自動制御学論文集, **37**–3, 213/221 (2001) (8 章)

国際会議

1. Y. Kobayashi, T. Kimura and S. Yanabe: Robust Speed Control of an Ultrasonic Motor via Gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ Control, Proceeding of the 3rd Asian Control Conference, 1264/1269 (2000) (4 章)

2. Y. Kobayashi, T. Kimura and S. Yanabe: Speed Control of Ultrasonic Motor using H_∞ Repetitive Control, Proceeding of the 2nd Asian Control Conference, Vol. 2, 175/178 (1997) (5 章)

国内会議

1. 小林, 浅井: むだ時間を含む重み関数を用いた周期外乱抑制制御系の設計, 計測自動制御学会 第 38 回 学術講演会予稿集, 205/206 (1999) (6 章)

2. 小林, 浅井: 修正繰返し制御系の制御性能 — 0 位 相フィルタに基づく新しい枠組 —, 計測自動制御学会 第 21 回 Dynamical System Theory シンポジウム予稿集, 345/348 (1998) (6 章)

謝辞

本論文は著者が東京工業大学大学院に在籍中および 1995 年に長岡技術科学大学助手として採用されてから現在に至るまでに行ってきた研究の成果を基に作成したもので，この間，多くの方々に御指導，御協力をいただきましたので，ここに感謝の意を表します．

本論文の制御対象である超音波モータの研究を行う機会を与えていただき，また著者が長岡技術科学大学に赴任してから現在に至るまで公私にわたり日々励まし支えてくださいました，長岡技術科学大学機械系教授 矢鍋重夫先生に，心より深く感謝いたします．

東京工業大学大学院に在籍中から現在に至るまで，本研究の遂行ならびに本論文の作成に際して数多くの有益な御助言をいただき，長きにわたって至らぬ著者を御指導くださいました，東京工業大学大学院情報理工学研究科教授 原辰次先生に，心より深く感謝いたします．

日頃より超音波モータの制御実験に関して有益な御助言をいただき，また長岡技術科学大学にタイミングよく赴任され本論文の執筆に関して細部にわたり御指導いただきました，長岡技術科学大学機械系助教授 木村哲也先生に心より感謝いたします．

超音波モータドライバをはじめとする電気回路全般の製作を快く引き受けていただいた新潟ウオシントン (株) 鬼山武行氏に心より深く感謝いたします．また，超音波モータの回転制御系および振動測定系のケーシング等を製作していただいた父に，深く感謝いたします．これらの実験装置なしに本研究を遂行することはできませんでした．

東京工業大学大学院に在籍中から現在に至るまで，最も身近な相談相手として著者が納得するまで熱心に議論してくださいました，大阪大学大学院工学研究科助手 浅井徹先生に，心より深く感謝いたします．先生からは具体的な研究の進め方について多くを学ばせていただきました．ここにあらためて感謝いたします．

最後に，本論文を執筆する上で心の支えとなった妻と子供達に感謝します．また，子供共々いつもお世話いただいている柏崎・塚山両家族の皆様に感謝いたします．特に妻ゆかりには，本論文の執筆と自宅建設の時期が重なったため，多大な苦労をかけました．ここにあらためて感謝します．

本研究の遂行に際して御尽力いただいた皆様の御健康と今後の御活躍をお祈りし，謝辞とかえさせていただきます．